



UNIVERZITA
KONŠTANTÍNA FAKULTA
FILOZOFA PRÍRODNÝCH VIED
VNITRE A INFORMATIKY

Skákajúce kamene



Matematický B-deň 2025



Universiteit Utrecht

Matematický
B-deň

Wiskunde voor
teams



ÚVOD

O ZADANÍ

Niektoré hry alebo hádanky stačí vysvetliť dvoma vetami, no napriek tomu môžu otvárať bohaté a rozmanité svety. Dnes budete skúmať niečo v tomto duchu: hracia doska so štvorcovými políčkami je zaplnená kameňmi, ktoré sa môžu navzájom preskakovať. Kam až môžu kamene preniknúť do voľných polí na hracej doske? Dúfame, že sa nebudete hanbiť robiť svoje vlastné veľké kreatívne skoky a nakoniec dospejete k novým postrehom sprevádzaným jasným zdôvodnením.

ŠTRUKTÚRA DŇA

Tohtoročné zadanie Matematického B-dňa pozostáva z úvodných a doplnkových úloh, ktoré môžete riešiť do väčšej hĺbky. Na rozdiel od bežných hodín matematiky nemusíte vyriešiť všetky úlohy. Zadanie obsahuje úlohy od ľahších až po tie náročnejšie. Je v poriadku ak nedokončíte všetko, ale vo svojej záverečnej správe popíšte, čo ste skúsili, nad čím ste rozmýšľali a ako ďaleko ste sa dostali v riešení. Ak ste venovali dostatok času úvodným problémom, vyberte si jedno alebo viacero záverečných zadaní, aby ste sa mohli danej téme venovať hlbšie. Práve riešenie týchto posledných problémov môže váš tím ešte viac odlíšiť od konkurencie a pomôže vám získať lepšie umiestnenie!

PRÁCA V TÍMOCH

Zvláštnosťou Matematického B-dňa je, že matematiku robíte ako tím. Odporúčame vám, aby ste si urobili si rozvrh dňa a rozdelili úlohy. Nech každý člen tímu robí to, v čom je dobrý. Dajte každému priestor, aby mohol prispieť svojimi nápadiami a riešením. Môžete pracovať individuálne na rôznych alebo rovnakých úlohách v rovnakom čase a potom sa opäť stretnúť, aby ste diskutovali a hodnotili. Pri niektorých problémoch je užitočné naštudovať si riešenie viacerých príkladov. Takto si prácu môžete pekne rozdeliť.

POMÔCKY

Dnes budete potrebovať nasledovné pomôcky: pero, dostatok papiera na výpočty, toto zadanie a počítač alebo notebook na prípravu záverečnej správy. Používanie informácií z internetu nie je povolené, s výnimkou odkazov na stránky s hracími doskami (s hrami), ktoré sú priebežne zdieľané aj v tomto dokumente.

ČO BUDETE ODOVZDÁVAŤ?

Počas celého dňa budete pracovať na správe v elektronickej forme. S písaním správy nezačínajte príliš neskoro; čas odovzdania je presne 16:00. Vo svojej správe opíšete výsledky a zdôvodnenia. Vyrozmievajte svoj vlastný, jasný a presvedčivý príbeh VÁŠHO RIEŠENIA. Oceňujeme dobre napísané, jasné, presné, úplné, starostlivo formulované a určite originálne, kreatívne a lyrické správy.

Tipy:

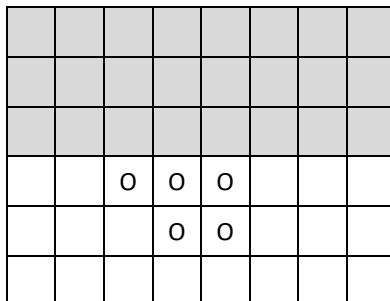
- Môže byť užitočné začať písať časti záverečnej správy už dopoludnia.
- Buďte zrozumiteľní: dbajte na to, aby bol text čitateľný aj pre niekoho, kto sa na Matematickom B-dni nezúčastnil, ale má dostatočné vedomosti z matematiky a vašim riešeniam rozumel aj bez toho, aby si prečítal zadanie. Do správy by ste nemali doslovne kopírovať úlohy zo zadania. Namiesto toho z nej vytvorte vlastný súvislý a tvorivý príbeh.

- Skúmanie a uvažovanie sú jadrom Matematického B-dňa. Ak uvádzate zdôvodnenia alebo vysvetlenia, snažte sa čo najviac využívať matematické argumenty. Čím presnejšie je vaše zdôvodnenie a čím viac podrobností poskytnete vo svojom zdôvodnení, tým lepšie. Ak máte o platnosti niektorých tvrdení stále pochybnosti, uveďte to aj v správe: "domnievame sa, že...".
- Na ilustráciu svojich myšlienok používajte obrázky. Použite, napríklad, kópie obrázkov, ktoré ste vytvorili pri riešení (snímky obrazovky alebo fotografie obrázkov na papieri).

Pri hodnotení sa berie do úvahy tak matematický obsah správy ako aj spôsob, akým je správa napísaná!

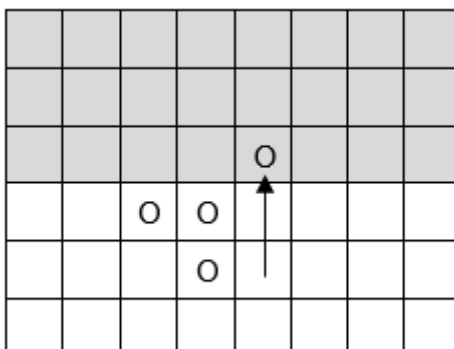
ÚVODNÉ ÚLOHY

Dnes budete skúmať varianty nasledujúcich hier pre jedného hráča. Prvý variant sa hrá na hracej doske rozdelennej na štvorcové políčka. Na políčku môže, ale nemusí, byť umiestnený kameň. Pozrite sa na obrázok nižšie, kde je zobrazené rozloženie kameňov na hracej doske.

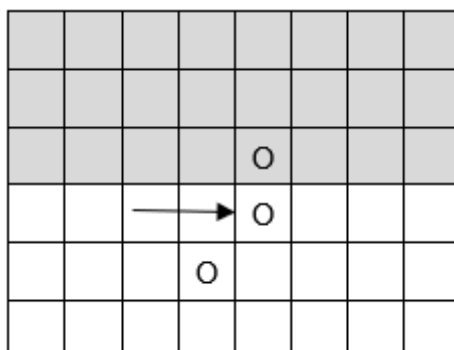


V hre je povolený len jeden jediný pohyb, takzvaná preskočka: preskakovanie susediacich kameňov buď horizontálne alebo vertikálne. Kameň musí byť umiestnený („doskočiť“) na prázdnom políčku. Takže kameň môže preskakovať smerom doprava, doľava, smerom nahor alebo nadol, ale nie diagonálne. Preskočený kameň z hracieho poľa zmizne.

Napríklad: Kameň v pravom dolnom rohu preskočí cez kameň, ktorý je umiestnený nad ním a posunie sa tak o dve miesta nahor od jeho východiskovej pozície. V hre je tak o jeden kameň menej.



Ďalší ťah môže byť takýto: Kameň, ktorý je úplne naľavo preskočí cez kameň napravo od neho a posunie sa tak o dve miesta vpravo.



Na začiatku hry môže byť určitý počet kameňov umiestnený na biele políčka hracieho poľa: *východiskové rozloženie*. Potom je povolený už len skákanie kameňov a nie je možné kamene pridávať. Cieľom je dostať sa čo najďalej v sivých políčkach hracieho poľa. Môžete použiť online hracie pole na nasledujúcom odkaze: https://www.bden.fpvai.ukf.sk/squares_game.php. Ak je to nevyhnutné, upravte priblíženie obrazovky (odzoomujte), aby ste videli celú dosku spolu s tlačidlami.

ZADANIE 1

Pozrite sa na východiskové rozloženie kameňov na doske nižšie:

- Skontrolujte, či je možné sa dostať do druhého sivého riadku (do riadku v sivom poli označeného číslom 2).

3							
2							
1							
		O	O	O			
				O			

- Zistite a zdôvodnite, s akou začiatočnou pozíciou troch kameňov sa nedostanete ďalej ako do prvého sivého riadku.

Ďalšou otázkou samozrejme je, či je možné dostať sa na pozíciu na treťom sivom riadku, a ak áno, s koľkými kameňmi a s akou začiatočnou (východiskovou) pozíciou. Môžete to, samozrejme, najprv skúšať náhodne, ale existuje aj elegantnejší postup. Teraz už viete, že z východiskovej pozície nižšie je možné sa preskákať do druhého sivého riadku. Ak sa Vám podarí po niekoľkých preskokoch sa dostať do pozície ako je na obrázku nižšie, potom by ste sa už mali dostať do tretieho sivého riadku.

3							
2							
1		O	O	O			
				O			

Takže otázka znie: Ako uložiť kamene do východiskovej pozície tak, aby ste po pár skokoch kameňov dostali výsledok, ako je na obrázku vyššie?

ZADANIE 2

- a. Nájdite takú začiatočnú (východiskovú) pozíciu.¹

Dnešnou výzvou nebude len dostať tak ďaleko, ako je to možné, ale dosiahnuť to s **čo najmenším možným počtom kameňov**.

- b. Nájdite východiskovú pozíciu, pomocou ktorej dosiahnete tretí sivý riadok s čo najmenším možným počtom kameňov. Vysvetlite postup, ako ste dospeli k danému výsledku. Zatiaľ ešte nemusíte argumentovať, prečo sa to nedá s menším počtom kameňov, k tomu sa dostaneme neskôr.

Poznámka: možno vo vašom riešení z časti a. už používate najmenší možný počet kameňov, v tom prípade už nemusíte robiť nič viac.

Dokonca sa zdá, že je možné dosiahnuť aj štvrtý riadok (aj keď s inou východiskovou pozíciou).

- c. Nájdite východiskovú pozíciu, pomocou ktorej dosiahnete štvrtý riadok s čo najmenším počtom kameňov. Vysvetlite, ako ste k výsledku dospeli. Možno budete potrebovať mierne väčšie hracie pole, ako je ukázané na obrázku nižšie. Opäť, zatiaľ nemusíte argumentovať, že menej kameňov nestačí, to príde neskôr.

4										
3										
2										
1										

Piaty riadok nie je dosiahnuteľný, takže sa nebudeme ďalej pýtať na spôsoby, akými by bolo možné ho dosiahnuť. Bola by to strata času. V nasledujúcich zadaniach budeme postupne rozvíjať argumentačné postupy, ktoré nám to ukážu. Venujte tomu pozornosť, pretože podobné postupy zdôvodňovania môžu byť užitočné neskôr pri vlastnom výskume.

Intermezzo: Fibonacciho postupnosť

Ústrednú úlohu v zdôvodňovaní bude mať Fibonacciho postupnosť: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Ako ste už pravdepodobne postrehli, vo Fibonacciho postupnosti predstavuje každý člen postupnosti (samozrejme okrem prvých dvoch) súčet dvoch predchádzajúcich členov.



¹V záverečnej správe môžete použiť aj niekoľko šípok a obrázkov medzivýsledkov, ktoré by ukazovali skoky potrebné pre umiestnenie kameňa do tretieho riadku.

Môžete použiť členy Fibonacciho postupnosti, aby ste šikovne ukázali, že nie je možné dosiahnuť tretí riadok, ak máte k dispozícii len sedem kameňov. Poďme zdôvodniť, že pri nasledujúcej začiatočnej východiskovej pozícii, nemôžete dosiahnuť tmavosivé políčko:

3												
2												
1												
				O	O	O	O					
					O	O						
						O						

Môžeme to vypočítať pomocou takzvaného Fibonacciho trojuholníka (F-trojuholníka). Príklad F-trojuholníka je zobrazený na obrázku nižšie. Každý stĺpec v F-trojuholníku tvorí Fibonacciho postupnosť; pri každom kroku od stredného stĺpca sa však postupnosť začína o jednu pozíciu vyššie. F-trojuholník musíte vždy umiestniť tak, aby pokrýval celú začiatočnú (východiskovú) pozíciu a súčasne, aby sa kamene pri plánovaných skokoch nedostali von mimo jeho hraníc. Časti F-trojuholníka môžu presahovať mimo hracej dosky.

1	2	3	5	8	13	21	13	8	5	3	2	1
1	1	2	3	5	8	13	8	5	3	2	1	1
	1	1	2	3	5	8	5	3	2	1	1	
		1	1	2	3	5	3	2	1	1		
			1	1	2	3	2	1	1			
				1	1	2	1	1				
					1	1	1					
						1						

Potom váha skupiny kameňov v závislosti od vybraného F-trojuholníka predstavuje súčet čísel v políčkach, na ktorých sú kamene umiestnené; napríklad ako v tejto ukážke:

$$2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 5 + 3 = 20.$$

Porovnajme váhu pozície kameňov pred a po realizovaných skokoch. Čo vidíte?

ZADANIE 3

Vysvetlite, prečo sa váha pozície môže pri skoku len znížiť alebo zostať rovnaká (nielen pre pozíciu z príkladu, ale pre všetky možné pozície).

Z toho priamo vyplýva, že z východiskovej pozície v príklade vyššie sa cieľové políčko (vyznačené tmavosivou farbou) nedá nikdy dosiahnuť. Váha východiskovej pozície je 20, kým váha cieľovej pozície musí byť aspoň 21, ak by sme počítali len s jediným kameňom.

Pre rôzne dané východiskové pozície existujú rôzne možnosti pre vytvorenie F-trojuholníkov. Pre ďalší postup nezáleží, aký F-trojuholník si vyberiete, pokiaľ dodržíte podmienky, ktoré boli spomenuté vyššie. Overte, či predchádzajúce zdôvodnenie bude fungovať aj v prípade, ak zvolený F-trojuholník posuniete o políčko smerom nahor alebo o jedno políčko smerom nadol, teda sa zmenia iba váhy pozícií.

Precvičte si tento spôsob zdôvodňovania, pretože to môže byť užitočné pri riešení ďalších zadaní.

Ak budeme mať východiskovú pozíciu zadanú ako na obrázku nižšie, nemôžete dosiahnuť cieľové políčko vyznačené tmavosivou farbou. Môžete to jednoducho ukázať tým, že si to sami vyskúšate, alebo to vysvetlíte pomocou F-trojuholníkov. Vypočítajte si, že je to nemožné. Taktiež to skúste ukázať, ak F-trojuholník bude umiestnený o políčko vyššie alebo nižšie.

2	3	5	8	13	21	34	21	13	8	5	3	1
1	2	3	5	8	13	21	13	8	5	3	2	1
1	1	2	3	5	8	13	8	5	3	2	1	1
	1	1	2	3	5	8	5	3	2	1	1	
		1	1	2	3	5	3	2	1	1		
			1	1	2	3	2	1	1			
				1	1	2	1	1				
					1	1	1					
						1						

Zdá sa, že zo žiadnej východiskovej pozície na hracom poli so siedmimi kameňmi nie je možné dosiahnuť tretí riadok.

ZADANIE 4

Uveďte úplné zdôvodnenie, prečo nemôžeme nikdy dosiahnuť tretí riadok so siedmimi kameňmi.

ZADANIE 5

- Uveďte úplné zdôvodnenie, prečo nemôžeme nikdy dosiahnuť štvrtý riadok so sedemnástimi kameňmi.
- Viete vaše zdôvodnenie ďalej rozšíriť aj pre 18, 19, ... kameňov?

Ako už bolo uvedené, piaty riadok nie je možné dosiahnuť, bez ohľadu na to, koľko kameňov použijete! Kľúčovým krokom pri tomto uvažovaní je, že nezáleží na tom, ako umiestnite F-trojuholník, súčet čísel v bielych políčkach je vždy menší ako číslo v cieľovom políčku v piatom riadku. Aby ste to vedeli zdôvodniť, potrebujete poznať špeciálnu vlastnosť Fibonacciho postupnosti.

Špeciálna vlastnosť Fibonacciho postupnosti. Pozrite sa na čísla, ktoré dostanete sčítaním prvkov postupnosti:

$$1 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 1 + 2 = 4$$

$$1 + 1 + 2 + 3 = 7$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$$

Všimnite si nasledujúci vzťah: súčet prvých 4 čísel Fibonacciho postupnosti sa rovná 6. číslu v poradí Fibonacciho postupnosti mínus 1; súčet prvých 5 čísel Fibonacciho postupnosti sa rovná 7. číslu v poradí Fibonacciho postupnosti mínus 1; a tak ďalej.

ZADANIE 6

Zdôvodnite, prečo súčet prvých n členov Fibonacciho postupnosti je rovný hodnote $(n + 2)$ -hého člena Fibonacciho postupnosti zmenšeného o 1.

Ak aj toto zadanie nevyriešite do konca, vaše úvahy môžete použiť neskôr.

ZADANIE 7

Uveďte úplné zdôvodnenie, prečo so žiadnou východiskovou pozíciou kameňov nemôžeme nikdy dosiahnuť piaty riadok.

VLASTNÝ VÝSKUM

Pozývame vás, aby ste si vybrali jednu (alebo viac) z nižšie uvedených tém pre svoj vlastný výskum.

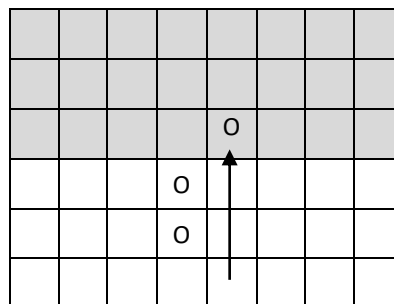
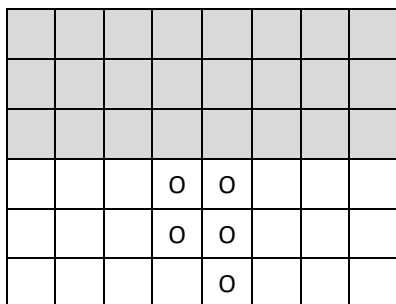
Len malá pripomienka, záverečná správa by mala pozostávať z úvodu na základe zistení zo úvodných úloh a zadaní. Potom popíšete postup a výsledky riešenia aspoň jedného z variantov, ktoré sú uvedené ďalej.

Vo vlastnom výskume si budete klásť rovnaké otázky ako v úlohách a zadaniach, ktoré ste riešili už od rána:

- S akým minimálnym počtom kameňov môžeme dosiahnuť druhý, tretí, štvrtý, atď. riadok? Aká zvoliť východiskovú pozíciu? Je jedinečná alebo existuje viacero možností?
- Ako dokážete, že už nie je možné použiť menší počet kameňov?
- Ktorý riadok nemôže byť dosiahnutý s daným počtom kameňov alebo bez ohľadu na počet kameňov? Ako by ste to vedeli dokázať?

VARIANT 1

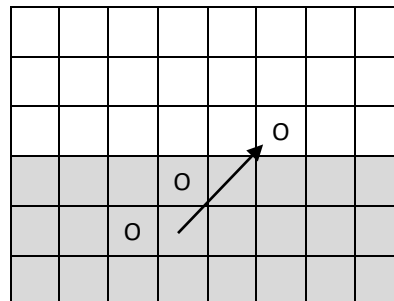
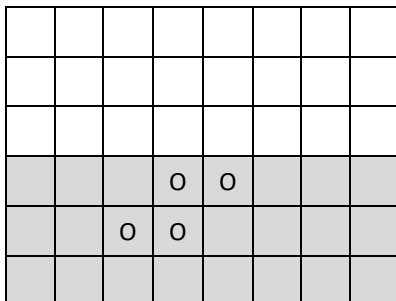
Uvažujte o možnosti, že kameň môže preskakovať cez dva iné kamene, nielen jeden, horizontálne alebo vertikálne:



Pripomíname, že môžete využiť aplet https://www.bden.fpvai.ukf.sk/squares_game.php

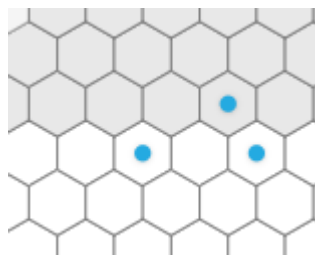
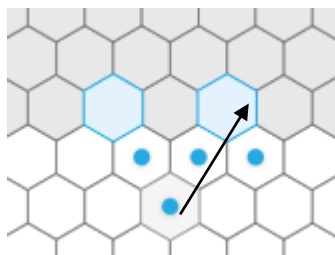
VARIANT 2

Uvažujte, že KAMEŇ môže skákať len diagonálne v štyroch smeroch (ale už nie horizontálne alebo vertikálne):



VARIANT 3

Hracie pole pozostáva z šesťuholníkových políčok a skok môže byť realizovaný v šiestich smeroch:



Môžete použiť online hracie pole na nasledujúcom odkaze:

https://www.bden.fpvai.ukf.sk/hexagon_game.php.

Všimnite si podčiariť "_" medzi "hexagon" a "game". Ak je to nevyhnutné, upravte priblíženie obrazovky (odzoomujte), aby ste videli dosku spolu so všetkými tlačidlami.

VOĽNÝ VARIANT

Vytvorte vlastnú variáciu hry a skúmajte podobným spôsobom.

Poznámka: Použitie váhy pozície k uvažovaniu o tom, či sa dá dosiahnuť konkrétny riadok s určitým počtom kameňov je pomerne silné, ale nie vždy to predstavuje „konečné slovo“.

Uvedme si fiktívny príklad: predpokladajme, že najpresvedčivejším dôkazom, ktorý môžete poskytnúť pomocou váhy pozície je, že nie je možné dosiahnuť šiesty riadok s 23 kameňmi. Predpokladajme, že ste našli východiskovú pozíciu, ktorá dovoľuje dosiahnuť šiesty riadok s 25 kameňmi. Dve veci tu môžu byť stále nesprávne: dá alebo nedá sa to dosiahnuť s 24 kameňmi? Ak sa to nedá, budete musieť vymyslieť inú metódu uvažovania, možno celkom odlišnú od tej, ktorá sa opiera o váhu pozície. Nikto vám v tom nebráni!