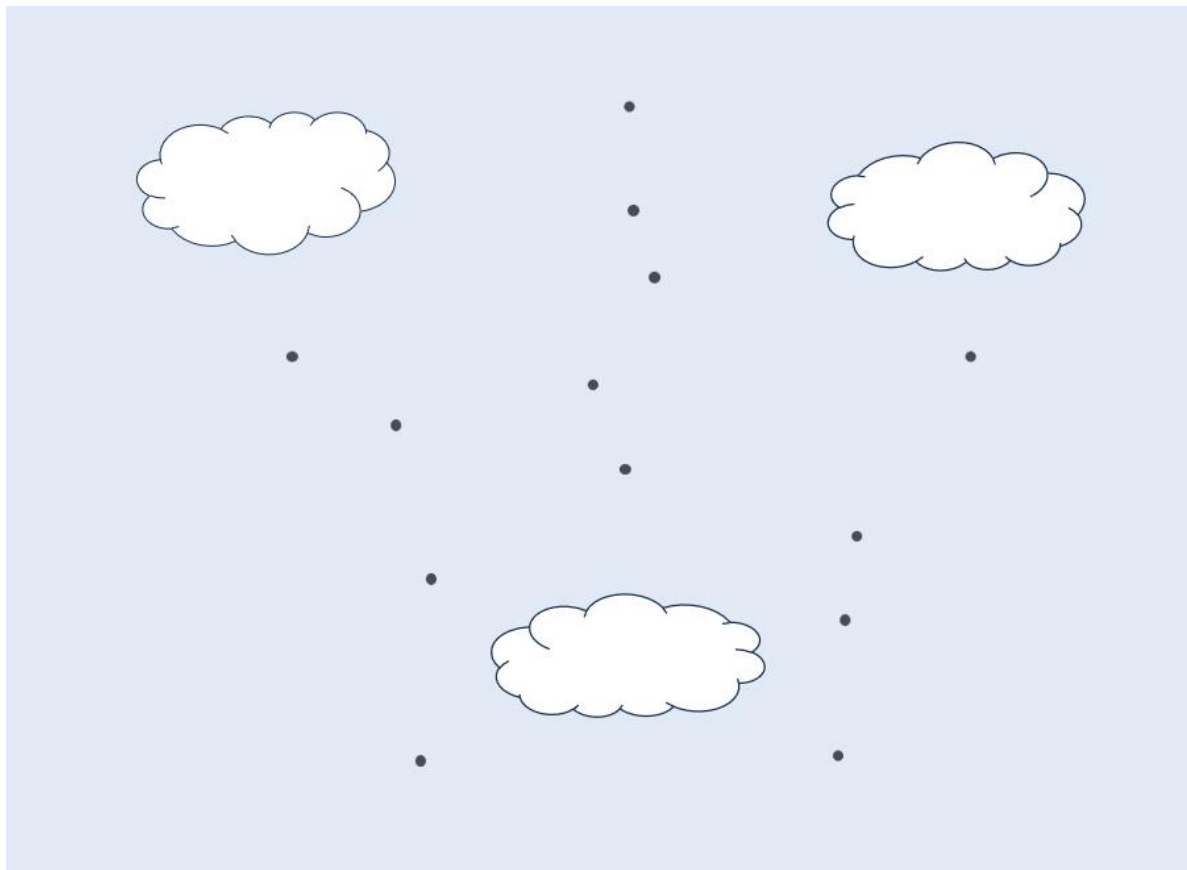


Matematický B-deň 2024



V oblakoch



Universiteit Utrecht



UNIVERZITA
KONŠTANTÍNA FAKULTA
FILOZOFA PRÍRODNÝCH VIED
VNITRE A INFORMATIKY

Matematický
B-deň

Wiskunde voor
teams 

Freudenthal Institute

ÚVOD

ÚVOD

O ÚLOHE

Čo vidíte, keď sa pozriete do oblakov? Ovcu, draka? Aj matematici sa môžu donekonečna pozerať do oblakov, teda do mračien bodov, čiže do zhlukov bodov v rovine. Dnes bude vašou úlohou vidieť v nich takzvané konvexné mnohouholníky. Tento problém je veľmi ľahko vysvetliteľný, ale má nevyspytateľnú hĺbkú. Dost' na to, aby ste sa ním zabavili na celý deň!

ŠTRUKTÚRA DŇA

Zadanie Matematického B-dňa 2024 pozostáva z úvodných úloh a ďalších, pokročilejších úloh. Na rozdiel od bežných hodín matematiky nemusíte vyriešiť všetky úlohy. Zadanie obsahuje úlohy od ľahkých až po náročnejšie. Na začiatok vám pomôžu návrhy a návody, ako riešiť niektoré úlohy. Je normálne, že sa vám nepodarí vyriešiť všetko, ale v správe aspoň ukážte, čo ste skúsili a ako ďaleko ste sa dostali, napríklad, na základe návodov. Ak ste venovali dostatok času úvodným problémom, vyberte si jedno alebo viacero záverečných zadaní, aby ste sa mohli danej téme hlbšie venovať. Práve riešenie týchto posledných problémov môže váš tím ešte viac odlíšiť od konkurencie a pomôže vám získať lepšie umiestnenie!

PRÁCA V TÍMOCH

Zvláštnosťou Matematického B-dňa je, že matematiku robíte ako tím. Mohlo by byť užitočné urobiť si rozvrh dňa a rozdelenie úloh. Nech každý člen tímu robí to, v čom je dobrý. Dajte každému priestor, aby mohol prispieť svojimi nápadmi a riešením. Môžete pracovať individuálne na rôznych alebo rovnakých úlohách v rovnakom čase a potom sa opäť stretnúť, aby ste diskutovali a hodnotili. Pri niektorých problémoch je užitočné naštudovať si riešenie viacerých príkladov. Takto si prácu môžete pekne rozdeliť.

POMÔCKY

Dnes budete potrebovať nasledovné pomôcky: pero, dostatok papiera na výpočty, pripravenú aplikáciu (applet), toto zadanie a počítač alebo notebook na prípravu správy. Používanie informácií z internetu nie je povolené.

ČO BUDETE ODOVZDÁVAŤ?

Počas celého dňa budete pracovať na správe v elektronickej forme. S písaním správy nezačínajte príliš neskoro; čas odovzdania je presne 16:00. Vo svojej správe opíšete výsledky a zdôvodnenia. Vyrozmárajte svoj vlastný, jasný a presvedčivý príbeh. Oceňujeme dobre napísané, jasné, presné, úplné, starostlivo formulované a určite originálne, kreatívne a lyrické správy.

Tipy:

- Môže byť užitočné začať písať časti záverečnej správy už ráno.
- Budte zrozumiteľní: dbajte na to, aby bol text čitateľný aj pre niekoho, kto sa na Matematickom B-dni nezúčastnil (ale má dostatočné vedomosti z matematiky) a aby vašim riešeniam rozumel aj bez toho, aby si prečítal zadanie. Do správy by ste nemali doslovne kopírovať úlohy zo zadania. Namiesto toho z nej vytvorte vlastný súvislý a tvorivý príbeh.

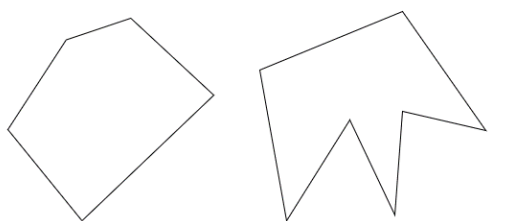
- Skúmanie a uvažovanie sú jadrom Matematického B-dňa. Ak uvádzate zdôvodnenia alebo vysvetlenia, snažte sa čo najviac využívať matematické argumenty. Čím presnejšie je vaše zdôvodnenie a čím viac podrobností poskytnete vo svojom zdôvodnení, tým lepšie. Ak máte o platnosti niektorých tvrdení stále pochybnosti, uveďte to aj v správe: "domnievame sa, že...".
- Na ilustráciu svojich myšlienok používajte obrázky. Použite, napríklad, kópie obrázkov, ktoré ste vytvorili pri riešení (snímky obrazovky alebo fotografie obrázkov na papieri).

Pri hodnotení sa berie do úvahy tak matematický obsah správy ako aj spôsob, akým je správa napísaná!

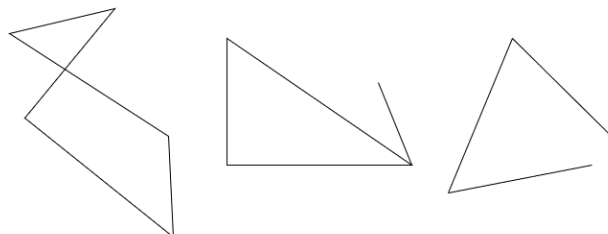
ÚVODNÉ ÚLOHY

Pravdepodobne už viete, čo je mnohoúhelník: je to časť roviny ohraničená konečnou postupnosťou úsečiek, kde:

- každá úsečka začína vo vrchole, v ktorom končí predchádzajúca úsečka a posledná úsečka končí vo vrchole, v ktorom začína prvá úsečka;
- žiadne dve úsečky sa nepretínajú.



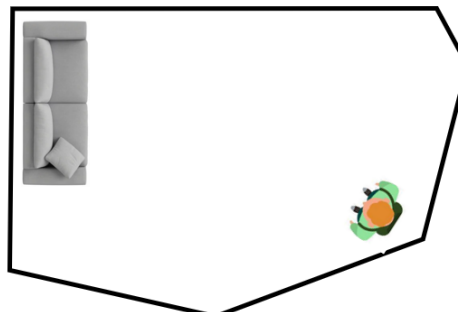
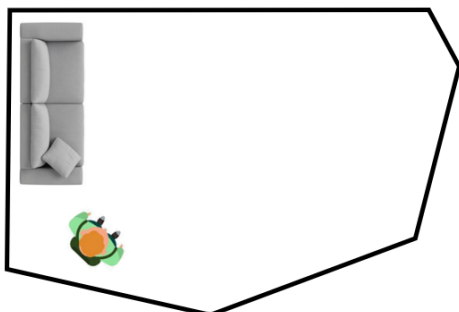
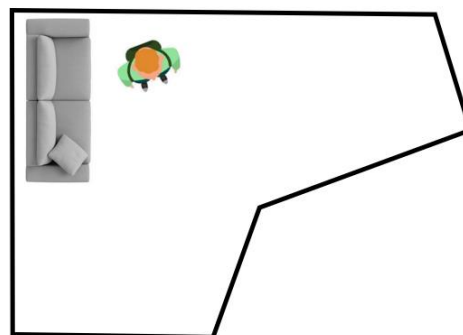
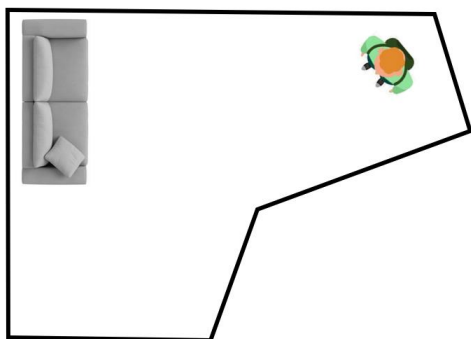
mnohouholníky



nie sú mnohoúhelníky

SKÚMANIE 1 (ÚVODNÉ SKÚMANIE)

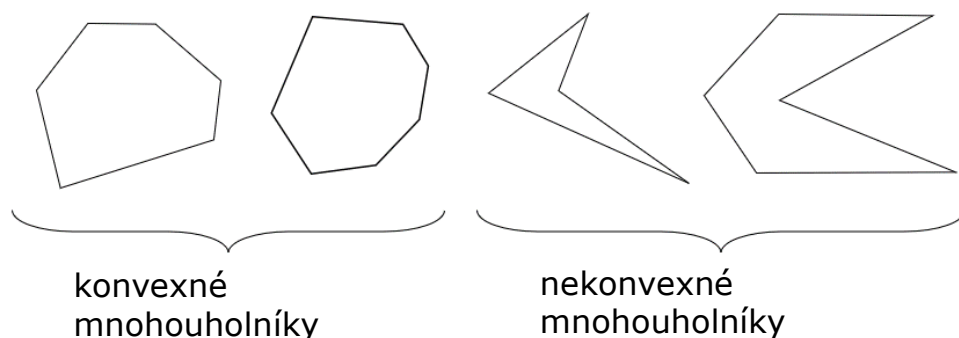
Predpokladajme, že miestnosť má pri pohľade zhora tvar mnohoúhelníka. Za akých podmienok na tomto mnohoúhelníku môžete **z ľubovoľného bodu** v miestnosti vidieť celú miestnosť? Vysvetlite, ako ste pri zisťovaní týchto podmienok postupovali.



KONVEXNÉ MNOHOUHOLNÍKY

Mnohouholník je **konvexný**, ak je jeho každý vnútorný uhol menší ako 180 stupňov.¹

Konvexné mnohoúhelníky môžeme charakterizovať aj nasledovne: pre ľubovoľnú dvojicu vrcholov A a B všetky body úsečky AB ležia vo vnútri mnohoúhelníka (alebo aspoň na jeho okraji).



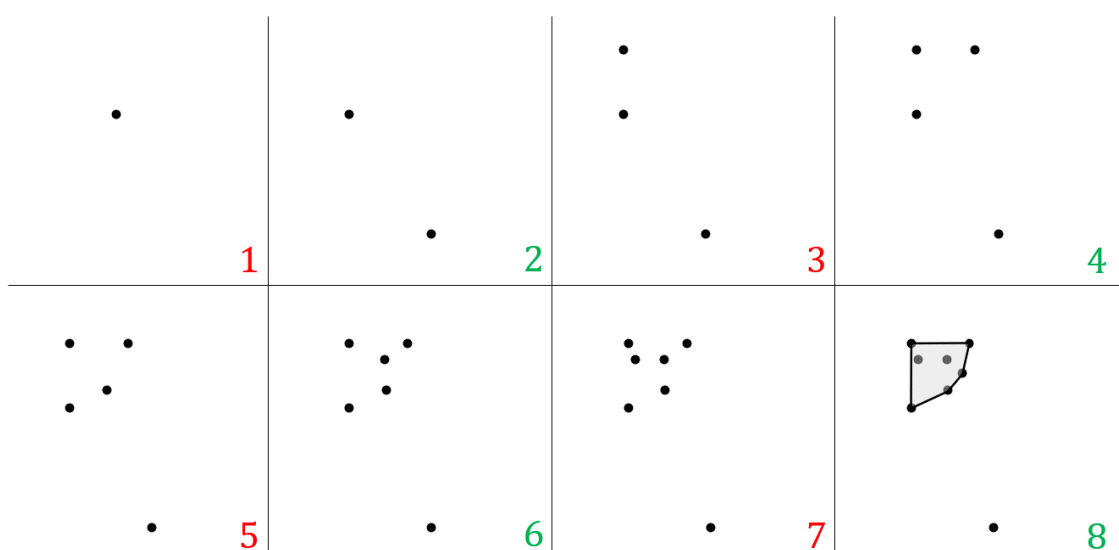
Ďalšia vlastnosť konvexných mnohoúhelníkov je, že pre každú ich stranu platí, že celý mnohoúhelník leží v jednej z polrovín určených priamkou, na ktorej táto strana leží.

HRA S KONVEXNÝMI MNOHOUHOLNÍKMI

Teraz popíšeme jednoduchú hru pre dvoch hráčov, v ktorej hrajú hlavnú úlohu konvexné päťuholníky. Budete potrebovať hárok papiera a písacie potreby. Toto sú pravidlá:

1. Hráči sa striedajú v pridávaní bodov na hárok papiera.
2. Žiadne tri body nesmú ležať na jednej priamke.
3. Keď hráč vo svojom ťahu pridá bod tak, že bude možné vytvoriť konvexný päťuholník s vrcholmi v doposiaľ pridaných bodoch, prehral.

Na ďalšej strane je zobrazený možný priebeh hry.



¹ Obvykle sa rozlišuje medzi konvexnými a rýdzokonvexnými mnohoúhelníkmi. To, čo tu nazývame konvexné, je v skutočnosti rýdzokonvexné. Rozdiel je v tom, že zvyčajne konvexné mnohoúhelníky umožňujú vnútorné uhly aj vo veľkosti 180 stupňov alebo tri vrcholy ležiace na jednej priamke. Týmto typom mnohoúhelníkov sa v tomto zadaní nevenujeme, a preto budeme používať pojem "konvexný".

Prvý hráč vyhráva, pretože druhý hráč umiestnením posledného bodu umožní vznik konvexného päťuholníka (a dokonca aj druhého).

ÚLOHA 1 (VYSKÚŠAJTE SI TO!)

Zahrajte si hru! Na papieri alebo tu:

https://www.bden.fpvai.ukf.sk/opdracht_slovak.php

Zakaždým si zapíšete, ako dlho (koľko ťahov) hra trvala. Čo ste si všimli?

Poznámka: Nehrajte príliš dlho, maximálne 5-10 minút! Ešte vás čaká veľa práce.

Matematický

B-deň

Oznamy

Súťaž

Registrácia

Archív

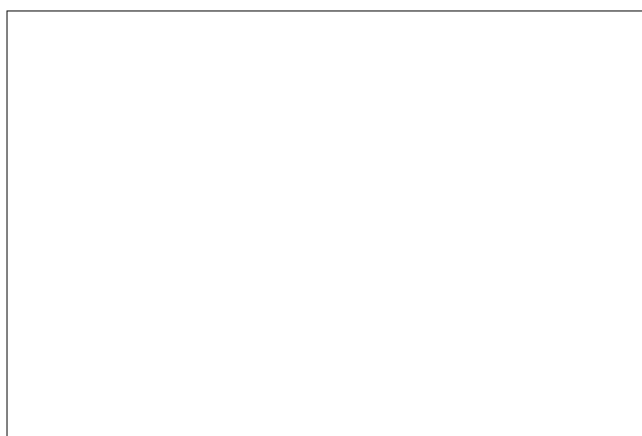
Pravidlá

Kontakt

Dostupné aplety: [Hra - Voľné skúmanie](#)

Hra o konvexných mnohoúhelníkoch

1. Hráč vo svojom ťahu umiestni bod na plochu
2. Žiadne tri body nesmú ležať na jednej priamke
3. Ak hráč umiestnením bodu umožní zostrojenie pravidelného päťuholníka, prehrá.



Na ťahu je:

Hráč 1

Pridajte bod kliknutím na plochu alebo zadáním súradníc:

X=? Y=? Ok

Obnovit

Pozícia:
x=7, y=25

Zoznam bodov:

SKÚMANIE 2

Po vytvorení prvého konvexného štvoruholníka počas hry musíte byť opatrní. Existujú štyri oblasti, v ktorých nový, piaty, bod nemôže skončiť. Pre body na nasledujúcom obrázku nakreslite hranice týchto oblastí a vyfarbite ich.



ÚLOHA 2 (KOOPERATÍVNA HRA)

Túto hru môžete hrať aj ako kooperatívnu hru. To znamená, že sa budete snažiť o umiestnenie čo najväčšieho počtu bodov tak, aby nevznikol konvexný päťuholník.

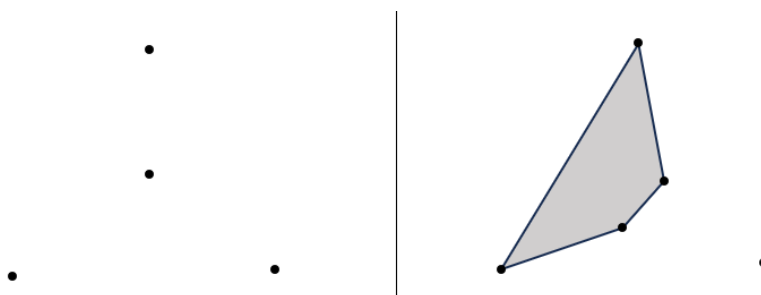
Preskúmajte, koľko ťahov môže hra trvať. Zapište si odhad (tento odhad budete ďalej skúmať počas zvyšku dňa).

Poznámka: Nehrajte príliš dlho, maximálne 5-10 minút! Stále máte pred sebou veľa práce.

JEDNODUCHŠÍ VARIANT S KONVEXNÝMI ŠTVORUHOLNÍKMI

Hru môžete hrať aj s konvexnými štvoruholníkmi namiesto päťuholníkov (v kooperatívnej forme). Hra je potom trochu nudnejšia. Otázka znie: Najmenej koľkými bodmi v rovine zaručene vznikne konvexný štvoruholník? Len si to vyskúšajte. Spoiler: odpoveď je "päť".

Stačí sa pozrieť na obrázok nižšie, na ľavú stranu: štyri vrcholy môžeme umiestniť tak, aby neboli vrcholmi konvexného štvoruholníka. Ale pri piatich vrcholoch je konvexný štvoruholník možné zostrojiť vždy. Na obrázku vpravo je príklad, že sa v rovine nedá umiestniť päť bodov tak, aby žiadne štyri z nich neboli vrcholy pravidelného päťuholníka. Nájdite niekoľko ďalších príkladov sami.



V aplikácii si môžete zahrať aj hru s konvexným štvoruholníkom. Ak to chcete urobiť, prejdite na "Voľné skúmanie" (v hornej časti) a vyberte "N", počet vrcholov N-uholníka.

Dostupné aplety: [Hra - Voľné skúmanie](#)

Voľné skúmanie



N= 4 ▼

Umiestnené body: 0

Pridajte bod kliknutím na plochu alebo zadaním súradníc:

X=? Y=? Ok

Obnoviť

Odstráň posledný bod

Pozícia:

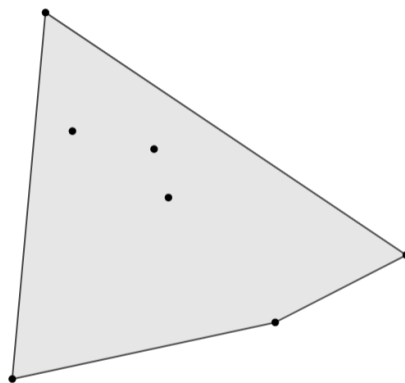
x=508, y=112

Zoznam bodov:

KONVEXNÝ OBAL

Množinu bodov v rovine, ako v hre, nazývame *mračno bodov*. Mračno bodov, v ktorom žiadne tri body neležia na jednej priamke, nazývame *dobрым mračnom bodov*. Dnes budeme pracovať s dobrými mračnami bodov, aj keď to výslovne neuvedieme.

Ak máte dobré mračno bodov, môžete cez "vonkajšie" body nakresliť konvexný mnohoúholník tak, že všetky ostatné body ležia v jeho vnútri. Tento mnohoúholník sa nazýva *konvexný obal bodov*.



Ak by boli body klincami v doske a okolo všetkých klincov by ste natiahli širokú gumičku, napnutá gumička by tvorila hranicu konvexného obalu, tzv. *konvexný plášť*.

ÚLOHA 3 (ÚVAHA O KONVEXNÝCH ŠTVORUHOLNÍKOCH)

Uvažujte o platnosti nasledujúceho tvrdenia:

V dobrom päťbodovom mračne sú vždy štyri body, ktoré tvoria konvexný štvoruholník.

Nižšie vám pomôžeme zdôvodniť, prečo je to tak.

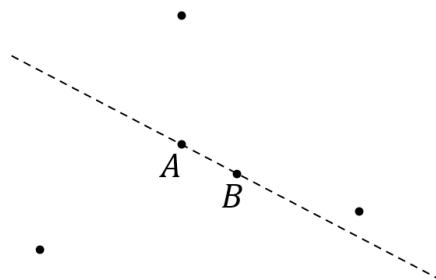
V prípade dobrého päťbodového mračna bodov existujú tri možnosti:

- i. Konvexný obal je päťuholník.
 - ii. Konvexný obal je štvoruholník.
 - iii. Konvexný obal je trojuholník.
- a. Uvedte príklad každého z nich. Prečo neexistuje iný konvexný obal?

V prípade i alebo ii je úvaha takmer okamžite ukončená.

- b. Zdôvodnite tieto dva prípady.

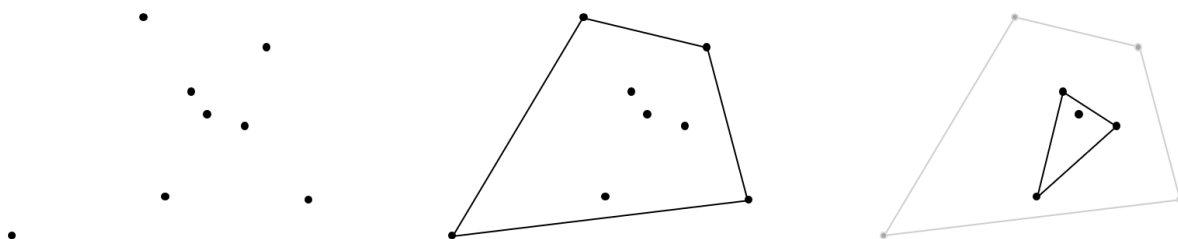
V prípade iii ležia zvyšné dva body v trojuholníku (prečo?). Pomenujte ich A a B . Uvažujme priamku AB .



c. Teraz doplňte zdôvodnenie.

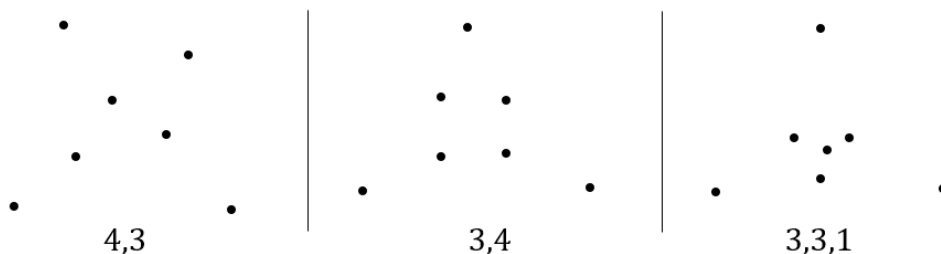
ODSTRAŇOVANIE VRSTIEV MRAČNA BODOV AKO PRI LÚPANÍ CIBULE

Skúmajte konvexný obal dobrého mračna bodov. Odstráňte vrcholy konvexného obalu, mračno bodov tvorené zvyšnými bodmi má tiež konvexný obal. Ak potom opäť odstránite tieto body, môžete vziať konvexný obal zvyšku a tak ďalej, až kým nezostane len 0, 1 alebo 2 body. Počty vrcholov každého konvexného obalu potom tvoria postupnosť prirodzených čísel. Nižšie je uvedený príklad, v ktorej je táto postupnosť 4, 3, 1.



Takúto postupnosť nazývame *postupnosť vrstiev* mračna bodov.

Nižšie sú uvedené príklady jednotlivých možných postupností vrstiev pre rozloženie so siedmimi bodmi, v ktorých sú členy postupnosti najviac 4.

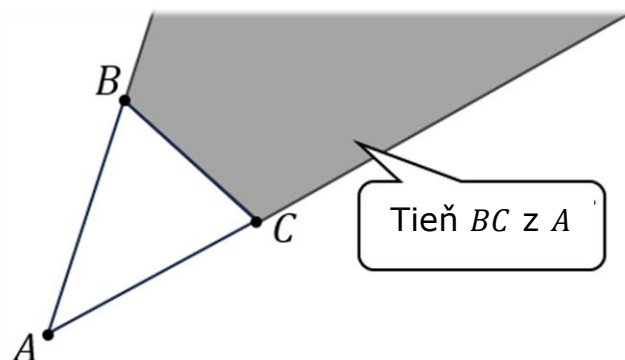


SKÚMANIE 3

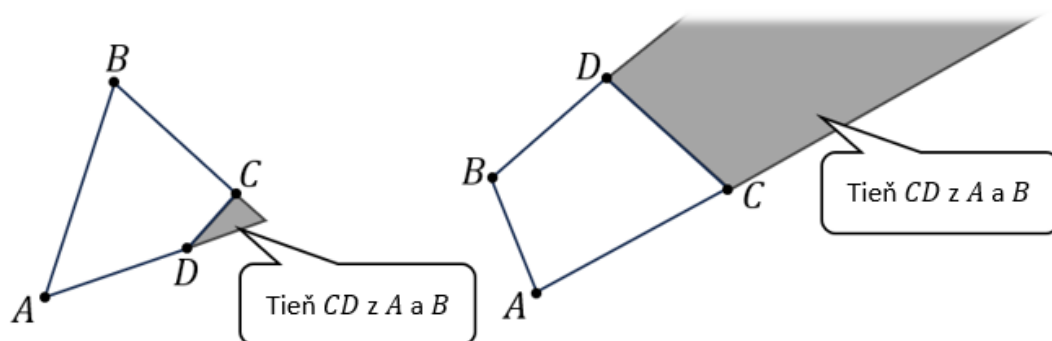
Nakreslite niekoľko rozložení bodov a uveďte ich postupnosť vrstiev.

TIEŇ

Pre ďalšie pokračovanie je užitočné zaviesť pojem *tieň*. Keď je daný bod A a úsečka BC , potom pojmom *tieň úsečky BC z bodu A* budeme označovať plochu ohraničenú úsečkou BC a polpriamkami AB a AC , v tej polrovine určenej priamkou BC , kde bod A sa nenachádza.



Môžeme definovať aj tieň z dvoch bodov: je to prienik tieňov týchto bodov. Inými slovami, bod je v tieni úsečky CD z bodov A a B , ak je v tieni z bodu A a aj v tieni z bodu B .



Táto oblasť sa nazýva *tieň úsečky CD z A a B* . Niekedy je tento tieň konečná plocha a niekedy je to plocha nekonečne veľká.

SKÚMANIE 4

Nakreslite tieň na niektoré trojuholníky a štvoruholníky. Vidíte súvislosť so skúmaním 2?

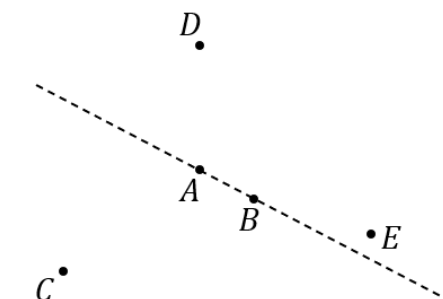
ÚLOHA 4

V úlohe 3, v časti c, ste uviedli argument, prečo v prípade iii (konvexný trojuholník s dvoma bodmi) vždy existuje konvexný štvoruholník. Platnosť tvrdenia opäť zdôvodnite, tentoraz pomocou tieňov. Začnite s trojuholníkom s jedným bodom a argumentujte, že druhý bod nemožno umiestniť nikam bez toho, aby vznikol konvexný štvoruholník.

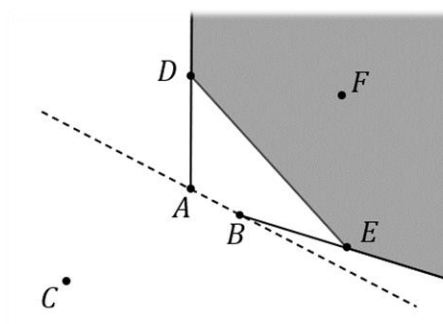
ÚLOHA 5 (ZDÔVODŇOVANIE POMOCOU TIEŇOV A POSTUPNOSTÍ VRSTIEV)

Teraz vám pomôžeme zdôvodniť, že mrak bodov s postupnosťou vrstiev 3, 3, 2 má vždy konvexný päťuholník. Vnútorne body označíme A a B . Rovnako, ako predtým, leží

v polrovine danej priamkou AB jeden bod, ktorý označme C , a v druhej polrovine ležia dva body, označme ich D a E . Vnútorný trojuholník je teda trojuholník CDE . Body vonkajšieho trojuholníka nazveme F , G a H . Budeme uvažovať o tom, kde sa tieto body môžu nachádzať.



Ak jeden z bodov vonkajšieho trojuholníka leží v tieni DE z A a B , potom sme našli konvexný päťuholník.



Teraz predpokladajme, že v danom tieni neleží žiaden bod vonkajšieho trojuholníka. Potom sú buď dva body vonkajšieho trojuholníka v tieni CD z A , alebo sú dva body v tieni CE z B .

- Vysvetlite prečo (tu môžete experimentovať s aplikáciou: https://www.bden.fpvai.ukf.sk/files/archive/2024/applet/vrije_verkenning_slovak.html).
- Ďalej rozpracujte zdôvodnenie, prečo má mračno bodov s postupnosťou vrstiev 3, 3, 2 vždy konvexný päťuholník.

Rovnakým spôsobom môžete zdôvodniť, že rozloženie bodov s postupnosťou vrstiev 4, 3, 1 má vždy konvexný päťuholník. Vnútorný bod označme A a vrcholy trojuholníka B, C a D . Potom sa pozrite, ako sú štyri body štvoruholníka (E, F, G a H) rozložené v tieňoch BC , CD a DB z A .

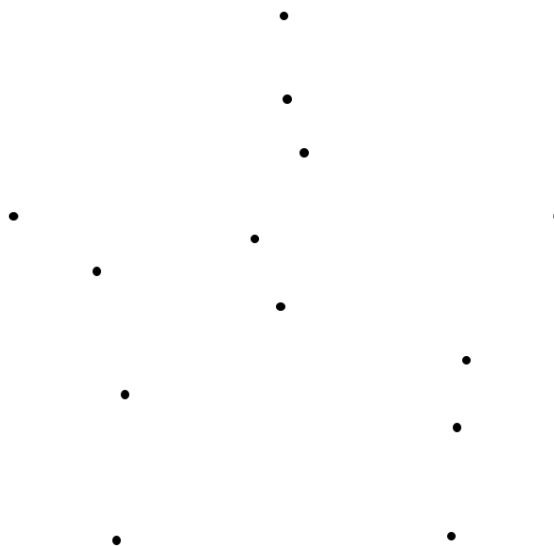
- Vytvorte z tejto myšlienky ucelený argument.

ŠEŠŤUHOLNÍKY, SEDEMUHOLNÍKY A TAK ĎALEJ...

Hru, ktorú sme predstavili na začiatku, možno samozrejme hrať aj vo variante pre konvexné šesťuholníky, sedemuholníky atď. Pre šesťuholníky znie otázka, ako dlho môže hra trvať najviac, nasledovne:

Z akého počtu bodov je zaručené, že každé dobré rozloženie bodov s týmto počtom bodov bude obsahovať konvexný šesťuholník?

Pre štvoruholníky je odpoveď "päť". A pre päťuholníky je odpoveď na túto otázku "deväť". Na obrázku nižšie (a na titulnej strane) je znázornené dobré rozloženie 13 bodov bez konvexného šesťuholníka (o tom teraz nemusíte polemizovať).



SKÚMANIE 5

Dokážete vytvoriť rozloženie s viac ako 13 bodmi bez konvexného šesťuholníka?

Experimentujte v aplikácii:

(Pre "N" vpravo hore vyberte 6).

Pokúste odpovedať na nasledujúcu otázku: Vo všeobecnosti, ak $n \geq 3$ je celé číslo,

z akého počtu bodov je zaručené, že každé dobré mračno bodov s týmto počtom bodov obsahuje konvexný n -uholník?

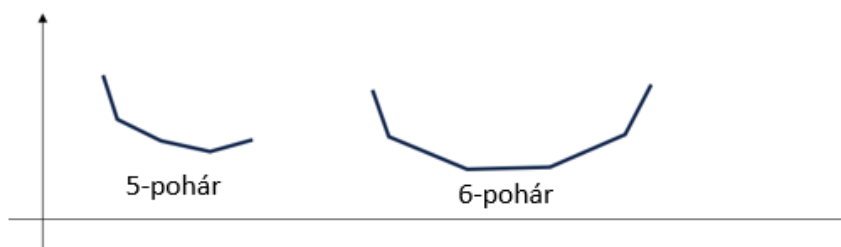
Tento požadovaný počet (za predpokladu, že je konečný) označujeme $C(n)$. Už vieme, že $C(3) = 3$, $C(4) = 5$ a vyššie sme tvrdili, že $C(5) = 9$, ale úvaha ešte nekončí, pokračuje vo Výskumnej téme 1. Z uvedeného obrázku možno vyvodiť, že $C(6) \geq 14$, čiže najmenší počet bodov, pre ktoré podmnožina šiestich vždy tvorí konvexný šesťuholník, nie je menší ako 14. Inými slovami, číslo štrnásť je *dolnou hranicou* pre $C(6)$. Ak máte mračno bodov pozostávajúce zo 14 bodov bez konvexných šesťuholníkov, potom ste túto dolnú hranicu zlepšili.

Bude hodnota $C(n)$ vždy konečná? Je napríklad možné, že môžete pridať nekonečne veľa bodov bez toho, aby ste dostali konvexný šesťuholník? V skutočnosti sa dá dokázať, že pre každé n je $C(n)$ konečné číslo, ale to už je tvrdenie, ktorého dôkaz presahuje rozsah dnešnej súťaže. Ak o tom môžete povedať čokoľvek rozumné, neváhajte to pridať do správy.

Jedným zo spôsobov, ako systematicky zlepšovať dolnú hranicu, sú takzvané poháre a vrchnáky.

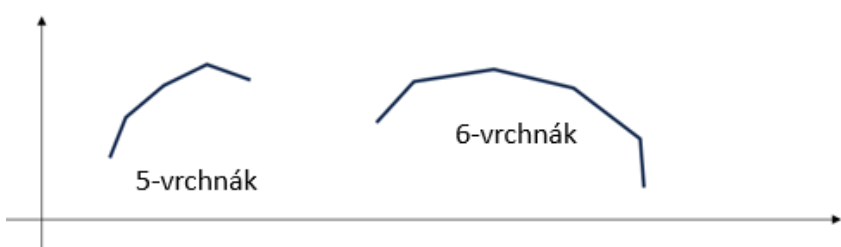
POHÁRE A VRCHNÁKY

Lomená čiara je konečná postupnosť úsečiek, pričom každá úsečka začína vo vrchole, v ktorom končí predchádzajúca. Lomená čiara v *súradnicovom systéme* je *pohár*, ak je každý vrchol napravo od predchádzajúceho a každá nasledujúca úsečka má väčší sklon (gradient) ako predchádzajúca.



Píšeme n -pohár, kde n znamená počet vrcholov.

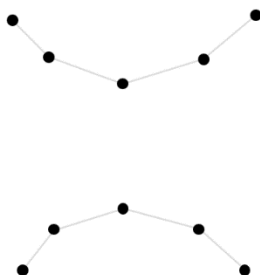
Naopak, lomená čiara v *súradnicovom systéme* je *vrchnák*, ak je každý bod napravo od predchádzajúceho a každá nasledujúca úsečka má menší sklon (gradient) ako predchádzajúca.



Poháre a vrchnáky vám môžu pomôcť vytvoriť mračná bodov bez konvexných mnohoúhelníkov.

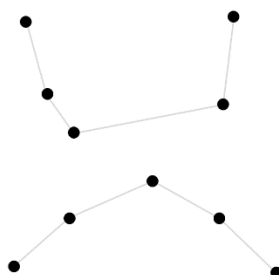
ÚLOHA 6

Umiestnite body do 5-vrchnáku (vodorovne) oproti bodom v 5-pohári tak, ako je uvedené nižšie.



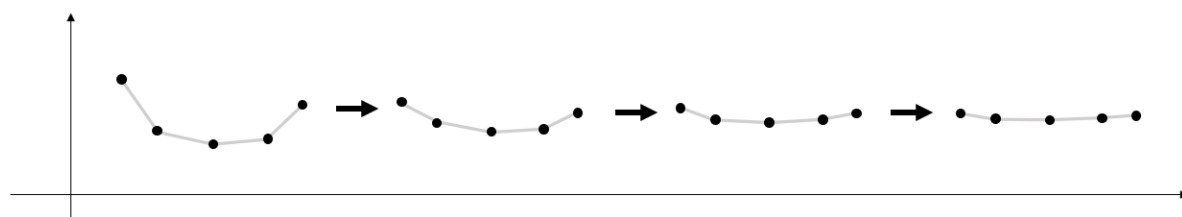
- a. Zdôvodnite, prečo vyššie uvedené rozloženie 10 bodov neobsahuje konvexný šesťuholník.

5-vrchnák ležiaci vodorovne oproti 5-poháru niekedy obsahuje konvexný šesťuholník.



- Vysvetlite, za akých podmienok vo všeobecnosti platí, že 5-vrchnák s vodorovne protiľahlými bodmi v 5-pohári neobsahuje konvexný šesťuholník.
- Zovšeobecnite svoje tvrdenie na n -vrchnák oproti n -poháru pre $n = 2, 3, 4, \dots$. Aké je vaše zistenie pre dolné hranice hodnôt $\mathcal{C}(n)$?

Samozrejme, že tu stále existujú body, ktoré sa zmestia medzi vrchnák a pohár. Aby ste mali prehľad o všetkých týchto bodoch, je užitočné vrchnáky a poháre takmer vyrovnáť. Pritom ich iba zmenšíte v zvislom smere, a to násobením sklonu kladným číslom.



- Vysvetlite, že prečo takto zostanú poháre pohármami a vrchnáky vrchnákmi, ale sklony môžu byť ľubovoľne blízke nule.
- Skúste šikovo umiestniť sploštené vrchnáky a poháre na stredné prerušované čiary pod sebou, aby ste vytvorili väčšie mračno bodov bez konvexného šesťuholníka. V prípade potreby otestujte svoj návrh v aplikácii.



VLASTNÝ VÝSKUM

Pozývame vás, aby ste si vybrali jednu (alebo viac) z nižšie uvedených tém pre svoj vlastný výskum.

Pripomíname, že výskumná práca pozostáva z úvodu do mračien bodov, konvexných mnohoúhelníkov a ústredného problému na základe vašich zistení z riešenia úvodných úloh. Potom opíšete svoj prístup a výsledky aspoň jedného z výskumov, ktorý si vyberiete z nižšie uvedených možností.

VÝSKUMNÁ TÉMA 1 (ÚVAHA O KONVEXNÝCH PÄTUHOLNÍKCH)

Pomocou postupností vrstiev a ďalším rozvíjaním úvah ako v úlohe 5, môžete zdôvodniť, že dobré rozloženie 9 bodov bude zaručene obsahovať konvexný päťuholník. Uvedte takýto argument. Uvedte aj príklad dobrého rozloženia ôsmich bodov bez konvexného päťuholníka.

Tip: Začnite rozložením 9 bodov. Popíšte všetky možné postupnosti vrstiev, ktorých maximálny člen má hodnotu 4. Potom uvedte argument pre každú postupnosť vrstiev, ak ste tak už neurobili v úlohe 5.

VÝSKUMNÁ TÉMA 2

(STANOVENIE DOLNÝCH HRANÍC POMOCOU POHÁROV A VRCHNÁKOV)

Ďalšou úlohou je vytvoriť čo najväčšie mračno bodov (t. j. mračno s čo najväčším počtom bodov) bez konvexného sedemuholníka.

Na tento účel pomáha vytvoriť okrem bežných pohárov a vrchnákov aj také rozloženia bodov, ktoré obsahujú nanajvýš 3-vrchnáky a 3-poháre, ale žiaden 4-vrchnák alebo 4-pohár. Takéto rozloženie bodov nazývame 3,3-vlnka.



Na obrázku vpravo nie je 3,3-vlnka, pretože z bodov sa dá vytvoriť 4-pohár. Avšak je možné vytvoriť 3,3-vlnku s viac ako 4 bodmi.

- a. Z akého najväčšieho počtu bodov je možné vytvoriť 3,3-vlnku?

Vo všeobecnosti platí, že k, l -vlnka je mračno bodov, ktoré obsahuje najviac k -vrchnák a l -pohár, ale neobsahuje $(k + 1)$ -vrchnák alebo $(l + 1)$ -pohár.

- b. Pomocou metód z úlohy 6 preskúmajte, aké najväčšie mračno bodov môžete vytvoriť bez konvexného sedemuholníka.

Rada: určite je to možné s viac ako 25 bodmi. Pri riešení môžete použiť aj aplikáciu.

Pripomíname: $C(n)$ znamená najmenší počet bodov v dobrom mračne bodov, kde n je počet bodov tvoriacich konvexný n -uholník.

- c. Môžete nájsť vzťah medzi n a $C(n)$? Nejde o vašu hypotézu, ale o to, ako ste k nej dospeli.

VÝSKUMNÁ TÉMA 3 (PRÁZDNE KONVEXNÉ MNOHOUHOLNÍKY)

V dobrom mračne bodov je mnohoúholník *prázdny*, ak sa v ňom nenachádzajú žiadne body.



Hlavnú otázku, ktorú sme skúmali predtým, môžeme mierne upraviť:

Z akého počtu bodov je zaručené, že každé dobré mračno bodov s týmto počtom bodov obsahuje prázdny konvexný n -uholník?

Toto najmenšie číslo označujeme $LC(n)$.

- Upravte argument z úlohy 3 tak, aby ste mohli povedať, že $LC(4) = 5$.
- Skúmajte: Aká je hodnota $LC(5)$?
Inými slovami: Aký je najmenší počet bodov v takom dobrom mračne bodov, že vždy obsahuje päť bodov, ktoré tvoria prázdny konvexný päťuholník? Svoju odpoveď podporte argumentmi. Rada: $LC(5) \neq 9$.

VÝSKUMNÁ TÉMA 4 (KONVEXNÉ ŠEŠŤUHOLNÍKY)

Koľko bodov v dobrom mračne bodov zaručuje existenciu konvexného šesťuholníka? V úlohe 6, časť e, ste našli dolnú hranicu $C(6)$. Dokážete tiež zdôvodniť, že je to horná hranica, teda, že pridaním ľubovoľného bodu zaručene vznikne konvexný šesťuholník? Ako ďaleko sa dostanete, ak budete uvažovať rovnakým spôsobom ako v úlohe 5 s konvexnými päťuholníkmi?