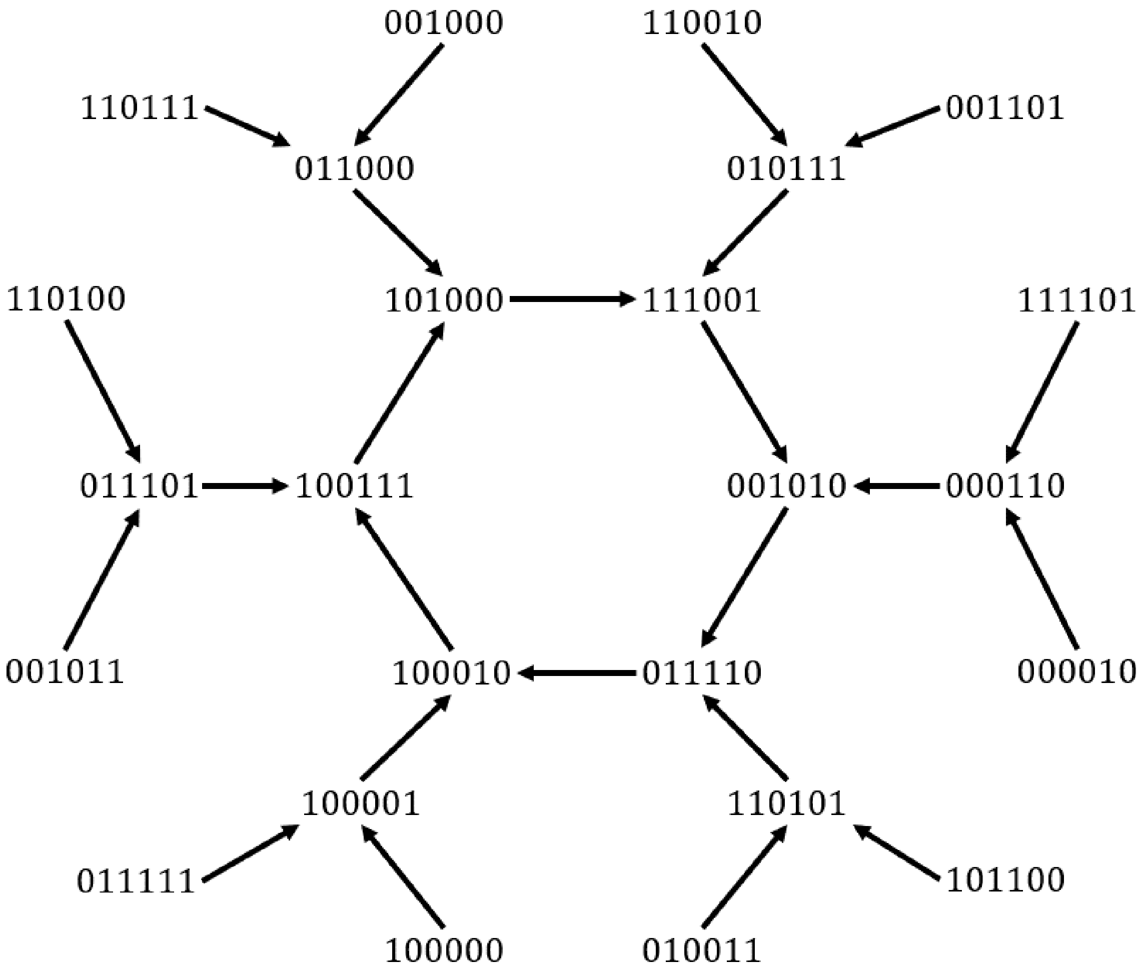
Matematický B-deň 2023



Je to rozdiel!

Universiteit Utrecht

Wiskunde voor teams

Freudenthal Institute

Úvod

O zadaní

Niekedy je za postupnosťou matematických operácií ukrytý celý svet. Dnes budete veľmi jednoduchým prístupom skúmať takýto nádherný svet. Začnete s postupnosťou čísel a pomocou rozdielov vytvoríte novú. Zdá sa, že by ste mohli rýchlo skončiť, ale zdanie je častokrát klamlivé.

Štruktúra dňa

Zadanie dnešného Matematického B-dňa pozostáva z úvodných úloh a ďalších, pokročilejších úloh. Na rozdiel od bežných testov na hodinách matematiky, nemusíte vyriešiť všetky úlohy. Zadanie obsahuje úlohy od ľahkých až po náročné. V úvode zadania vám pomôžu návrhy a návody, ako niektoré úlohy riešiť. Je prirodzené, že sa vám nepodarí vyriešiť všetko, ale v správe aspoň popíšte a ukážte, čo ste sa pokúsili vyriešiť a ako ďaleko ste sa dostali (napríklad s využitím návodov). Ak ste úvodným úlohám a problémom venovali dostatok času, vyberte si jedno alebo viacero záverečných zadaní a danej téme sa venujte hlbšie. Práve riešenie problémov v záverečnom zadaní môže váš tím ešte viac odlíšiť od konkurencie a umožní vám získať lepšie umiestnenie!

Pomôcky

Dnes budete potrebovať nasledovné pomôcky: pero, dostatok papiera na pomocné výpočty, toto zadanie, počítač alebo notebook na prípravu správy a tabuľkový procesor (MS Excel alebo Google Sheets) alebo Python. Neodporúčame používať internet, ale ak tak urobíte, nezabudnite v správe uviesť odkaz na zdroj (URL). Používanie ChatGTP alebo podobného programu nie je povolené.

Čo budete odovzdávať?

Počas celého dňa budete pracovať na záverečnej písomnej správe, ktorú odovzdáte v elektronickej forme. Záverečnú správu nezačínajte písať príliš neskoro; čas odovzdania je presne 16:00. Vo svojej písomnej záverečnej správe opíšete svoje výsledky a zdôvodnenia riešení. Vyrozprávajte svoj vlastný, jasný a presvedčivý príbeh. Oceňujeme dobre napísané, jasné, presné, úplné, starostlivo formulované a predovšetkým originálne, kreatívne či dokonca lyrické správy.

Tipy:

- Môže byť užitočné začať písať časti záverečnej správy už ráno.
- Buďte zrozumiteľní: dbajte na to, aby bol text čitateľný aj pre niekoho, kto sa nezúčastnil na Matematickom B-dni (ale má dostatočné vedomosti z matematiky) a aby dokázal porozumieť vašim riešeniam aj bez toho, aby si prečítal zadanie. Do správy by ste nemali doslovne kopírovať úlohy zo zadania. Namiesto toho z nej vytvorte pokračujúci, tvorivý príbeh.
- Skúmanie a uvažovanie sú jadrom Matematického B-dňa. Ak uvádzate zdôvodnenia alebo vysvetlenia, snažte sa čo najviac využívať matematické argumenty. Čím presnejšie je vaše zdôvodnenie a čím viac podrobností poskytnete vo svojom zdôvodnení, tým lepšie. Ak máte o platnosti niektorých svojich tvrdení pochybnosti, uveďte to aj v správe: "domnievame sa, že...".
- Na ilustráciu svojich myšlienok používajte obrázky. Použite napríklad kópie obrázkov, ktoré ste vytvorili pri riešení (snímky obrazovky alebo fotografie obrázkov na papieri).

Pri hodnotení sa berie do úvahy nielen matematický obsah riešení ale aj spôsob, akým je záverečná správa napísaná!

ÚVODNÉ ÚLOHY

Nech je daná konečná postupnosť kladných celých čísel, napríklad: $7, 5, 1, 10$. Môžeme z nej vytvoriť novú postupnosť tak, že vypočítame rozdiely medzi jej po sebe idúcimi členmi: $7-5=2$; $1-5=-4$; $1-10=-9$; $10-7=3$ a ich absolútne hodnoty [1] : $2, 4, 9, 3$. Takže posledný člen postupnosti bude rozdiel medzi jej posledným a prvým členom. Tomuto kroku hovoríme **rozdielový krok**. Na novovzniknutú postupnosť potom môžeme znova aplikovať rozdielový krok: dostaneme $2-4=-2$; $4-9=-5$; $9-3=6$; $3-2=1$, čiže $2, 5, 6, 1$. A ak rozdielový krok použijeme ešte raz, dostaneme postupnosť $3, 1, 5, 1$. Tieto postupnosti si môžeme prehľadne zapísať pod seba:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 5 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{array}$$

Tento zápis nazývame **séria postupností**. Takáto séria môže byť ľubovoľne dlhá, ak rozdielový krok použijeme znova a znova.

ÚLOHA 1 (LEN TAK SI JU VYSKÚŠAJME)

a. Preskúmajte, ako sa mení postupnosť $7, 5, 1, 10$, ak opakovane použijete rozdielový krok.
b. Preskúmajte dostatočne veľký počet ďalších postupností štyroch prirodzených čísel (t. j. čísel z množiny 0, 1, 2,..., atď.) a sformulujte domnienku o tom, čo sa stane, ak budete rozdielový krok opakovať dostatočne veľa krát.

Vyššie sme sa pozreli na postupnosť štyroch čísel, resp. postupnosti **dĺžky 4**; označme $n=4$. Rozdielový krok môžete opakovane aplikovať na postupnosti ľubovoľnej dĺžky, vrátane dĺžky 3, napr.

$$\begin{array}{ccc} 3 & 9 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}$$

c. Preskúmajte dostatočný počet postupností dĺžky 3 a sformulujte domnienku o tom, čo sa stane, ak zopakujeme rozdielový krok dostatočný počet krát.

Možno ste pri skúmaní naďabili na postupnosť, ktorá po niekoľkých rôznych krokoch skončila postupnosťou obsahujúcou iba nuly. Vtedy hovoríme, že postupnosť **zanikne**. Napríklad postupnosť $4{,}9$ (dĺžky 2) zanikne:

$$\begin{array}{cc} 4 & 9 \\ 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{array}$$

d. Dokážte, že každá postupnosť dĺžky 2 zanikne po dvoch krokoch.
e. Pravdepodobne ste našli aj postupnosť, ktorá končila sériou postupností, ktoré sa stále dookola opakovali. Ak sa to stane, postupnosť sa stane **cyklickou**[2]**.**

---

[1]Čiže zanedbáme znamienko.
[2]Zaniknutie je vlastne špeciálny prípad cyklickosti: riadok núl sa opakuje dookola.

Vyššie uvedená postupnosť $3, 9, 1$ sa stane cyklickou: od postupnosti 2, 2, 0 séria pokračuje nasledovne

2	2	0
0	2	2
2	0	2
2	2	0
0	2	2
2	0	2

atď.

PROBLÉM 2 (PREDĹŽENIE ŽIVOTNOSTI SEKVENCIE)

Pri ďalšej úlohe môžete použiť priloženú tabuľku (požiadajte učiteľa o súbor). Môžete si napísať aj vlastný program (napríklad v jazyku Python).

a. Výzva: Nájdite postupnosť dĺžky $n = 3$, pre ktorú treba aplikovať rozdielové kroky čo najviac krát, kým zanikne alebo sa stane cyklickou. Môžete použiť čísla 1 až 100. Vysvetlite, prečo séria nemôže mať viac krokov, ako ste našli.
b. Urobte to isté aj pre $n = 4$.

PROBLÉM 3 (ZANIKNUTIE ALEBO CYKLICKÁ POSTUPNOSŤ)

Ak porovnáte najväčšie číslo v postupnosti pred rozdielovým krokom s najväčším číslom v postupnosti po rozdielovom kroku, toto číslo môže zostať rovnaké alebo sa zmenší. Napríklad:

6	$\mathbf{8}$	0	2	
2	$\mathbf{8}$	2	4	rovnaké
$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	2	2	menšie
0	$\mathbf{4}$	0	$\mathbf{4}$	menšie
$\mathbf{4}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{4}$	rovnaké
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	menšie

a. Vysvetlite, prečo sa čísla v postupnosti nemôžu po rozdielovom kroku zväčšiť.

Teraz dokážte, že postupnosť musí po konečnom počte rozdielových krokov zaniknúť alebo sa stať cyklickou. Robí sa to prostredníctvom "dôkazu sporom": to znamená, že dokážete, že opak je nepravdivý. Najprv teda predpokladajme, že daná postupnosť *nezaniká* a *nestáva* sa cyklickou. Potom sa žiadna postupnosť nesmie v celej *nekonečnej sérii* objaviť viac ako raz.

b. Prečo sa v nekonečnej postupnosti nemôže žiadna postupnosť opakovať viac ako jedenkrát?

To znamená, že v sérii postupností musí byť nekonečne veľa *rôznych postupností* (séria predsa pokračuje nekonečne dlho). To však nie je možné. Predpokladajme napríklad, že najväčšie číslo v postupnosti dĺžky 4 je 12. Potom najväčšie číslo, ktoré sa vyskytuje v celom rade postupností, je tiež 12, pretože platí časť a. Ale postupností dĺžky 4 s najväčším číslom 12 je iba konečne veľa (overte si to; vypočítajte, koľko je možností).

c. Zovšeobecnite túto úvahu a vysvetlite, že v sérii postupností môže byť iba konečný počet rôznych postupností.

Teraz sme dospeli k sporu (takže dôkaz je hotový!), pretože na jednej strane musí séria postupností obsahovať nekonečný počet rôznych postupností, ale na druhej strane podľa časti c máme na to len konečný počet možností.

PROBLÉM 4 (NULY A JEDNA JEDNOTKA)

Dnes sa pozrieme na dlhšie postupnosti v špeciálnom tvare.

Začnime nasledujúcou postupnosťou siedmich núl a jednej jednotky:

0 0 0 0 0 0 0 1

a. Opakujte rozdielový krok, až kým nezanikne.
b. Preskúmajte postupnosti v tvare 0 0 … 0 1 ($n-1$ núl nasledovaných jednotkou) pre $n>1$. Pre aké hodnoty n postupnosť zanikne a pre aké sa stane cyklickou?
c. Sformulujte všeobecnú domnienku.

Pri niektorých postupnostiach sa objavuje efekt opakovania. Najprv sa pozrite na $n=2$

0	1
1	1

Všetky tri farebné časti sú rovnaké. Tento vzor je základným kameňom ďalšej série postupností pre $n=4$:

0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	1

Vzor sa opakuje v modrej, červenej a zelenej oblasti. Vidíte, že pre $n=8$ je situácia rovnaká:

0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

d. V časti b ste uviedli hodnoty n, o ktorých predpokladáte, že postupnosť $0,0,\dots,0,1$ zanikne. Dokážte túto domnienku.
e. Čo môžete povedať o postupnosti v tvare 0,0, …, 0, k ($n-1$ núl nasledovaných prirodzeným číslom k, nie nutne 1)?

PROBLÉM 5 (FÁZA 1 A 2)

a. Ak sa séria postupností stane cyklickou, vždy v nej nastane zvláštny moment. Od toho zvláštneho momentu postupnosť pozostáva iba z núl a jednej nenulovej hodnoty[3], ktorú môže nadobúdať niekoľko členov postupnosti. Napríklad:

2	4	6	0	0	
2	2	6	0	2	
0	4	6	2	0	
4	2	4	2	0	
2	2	2	2	4	
0	0	0	2	2	←Odtiaľto!
0	0	2	0	2	
0	2	2	2	2	
2	0	0	0	2	

b. Vysvetlite, prečo postupnosť, ktorá obsahuje iba nuly a jednu nenulovú hodnotu, nazvime ju a, (ako je napríklad postupnosť $0, 5, 0, 5, 5, 0$) sa po rozdielovom kroku zmení na postupnosť, ktorá znova obsahuje iba nuly a danú hodnotu a.

Kým postupnosť v sérii obsahuje viac ako dve rôzne nenulové hodnoty, je vo **fáze 1**. Ak sa prepne na postupnosti obsahujúce iba hodnoty 0, a, tak je vo **fáze 2**. V úlohe 5a ste vysvetlili, prečo sa nemôžete dostať z fázy 2 späť do fázy 1. A naopak, zdá sa, že fáza 1 sa vždy zmení na fázu 2.

c. Skúmajte, či každá postupnosť vo fáze 1 musí nutne skončiť vo fáze 2. Ak áno, zdôvodnite, prečo; ak nie, uveďte kontrapríklad.

PROBLÉM 6 (KROK SPÄŤ)

Má postupnosť $6, 3, 2, 5$ **predchodcu**? Inak povedané, môže byť táto postupnosť výsledkom rozdielového kroku? V tomto prípade je odpoveď: áno! Napríklad, začnite číslom 7. Potom druhé číslo postupnosti musí byť 7 ± 6 a tak ďalej. Môžete napríklad dostať predchodcu $7, 13, 10, 12$.

a. Dokážete nájsť predchodcu postupnosti $6, 3, 2, 5$? Nájdite a popíšte všetkých predchodcov postupnosti $6, 3, 2, 5$.

Správanie postupnosti je možné všeobecne zdôvodniť. Na označenie členov postupnosti dĺžky n je vhodné používať dolné indexy: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ pre postupnosť dĺžky n. Napríklad, pre postupnosť $6, 3, 2, 5$ máme: $a_1 = 6$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$ a $a_4 = 5$.

Vo všeobecnosti sa zdá, že postupnosť a_1, a_2, a_3, a_4 má predchodcu, ak existuje taká voľba znamienok + a −, že

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 = 0.$$

Tento vzťah naozaj platí pre postupnosť $6, 3, 2, 5$: $6 - 3 + 2 - 5 = 0$.

b. Skúmajte, prečo postupnosť a_1, a_2, a_3, a_4 má predchodcu práve vtedy, ak existuje taká voľba znamienok + a −, že

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 = 0.$$

[3] Samozrejme, ak začnete týmto typom postupnosti, nedôjde k žiadnej veľkej zmene.

c. Zovšeobecnite tvrdenie a zdôvodnenie z časti b pre postupnosti dĺžky n.

Pri riešení problému 1 ste si pravdepodobne všimli, že postupnosti dĺžky 3 nikdy nezaniknú, ak to nie sú postupnosti zložené z troch členov s rovnakou hodnotou. Napríklad postupnosti $4, 5, 6$ a $3, 3, 8$ nezaniknú, kým $2, 2, 2$ a $9, 9, 9$ áno. Overte to!

d. Dokážte, že postupnosti dĺžky 3 nezaniknú, ak neobsahujú tri rovnaké členy.

e. Čo očakávate od ostatných postupností *nepárnej* dĺžky?

VLASTNÝ VÝSKUM

Vyberte si a sami skúmajte jednu (alebo viacero) z ponúknutých tém.

Pripomienka: Záverečná písomná správa má pozostávať z úvodu do rozdielových postupností. Úvod by mal vychádzať z vašich zistení a riešení problémov 1 až 6. Potom by mal nasledovať váš originálny postup riešenia a výsledky z aspoň jedného zadania (štúdie), ktoré si môžete vybrať z možností uvedených nižšie.

ŠTÚDIA 1: ZANIKAJÚCE POSTUPNOSTI

Je toho veľa, čo môžete objavovať a skúmať o zanikajúcich postupnostiach. Tu je niekoľko možností:

- Pri riešení problému 3 ste zistili, že postupnosť dĺžky $n = 2$ vždy zanikne. Možno vám napadlo, že aj postupnosť dĺžky $n = 4$ by vždy mala zaniknúť. Dokážte, že postupnosť dĺžky $n = 4$ vždy zanikne.
- To, ako koľko rozdielových krokov bude postupnosti štyroch čísel trvať, kým zanikne, závisí od čísel, s ktorými začnete. Skúmajte vzťah medzi členmi prvej postupnosti v sérii a počtom krokov, kým táto postupnosť dĺžky $n = 4$ zanikne.
- Skúmajte a hľadajte pravidlá pre rôzne dĺžky n, pre ktoré všetky postupnosti zaniknú.

Pomôcka:

- Pre váš prvý výber: použite vaše riešenia a zistenia z Problému 4 a myšlienku z rámiku uvedeného nižšie.

Súčtové postupnosti

Pri úvodnom skúmaní vám môže pomôcť nasledujúca myšlienka: Nemôžete len tak sčítať dve postupnosti rovnakej dĺžky:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ ale } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ nie je séria postupností!}$$

Ak vaše skúmanie obmedzíte len na postupnosti skladajúce sa iba z 0 a a (t. j. postupnosti vo fáze 2) a vhodne upravíte pravidlá, potom to možné je. Upravené pravidlá budú vyzerať nasledovne: $0 \oplus 0 = 0$; $a \oplus 0 = a$; $0 \oplus a = a$ a $a \oplus a = 0$. Potom, napríklad, môžete dostať výpočet:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

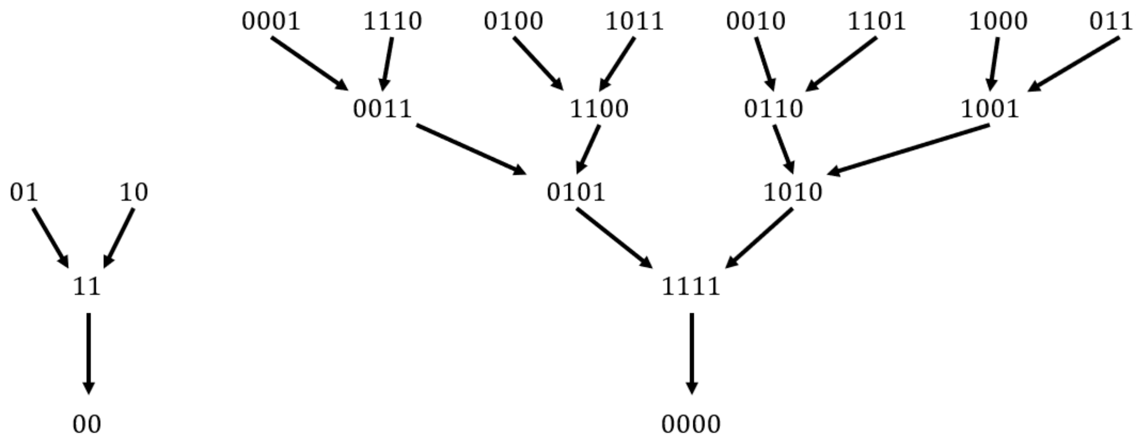
ktorého výsledok je naozaj nová séria postupností.

Tento výsledok môžete použiť v ďalšom skúmaní. Ak to chcete dokázať, stačí, ak sa pozriete, čo sa deje „lokálne", napríklad:

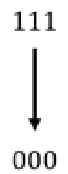
$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a & 0 & \dots \\ \dots & a & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & a & \dots \\ \dots & a & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = ?$$

Štúdia 2: Nulové stromy

V tejto štúdii sa zameriame na postupnosti vo fáze 2 (pozri Problém 5). Pre jednoduchosť predpokladajme, že nenulové členy postupnosti majú hodnotu 1. Potom môžeme vytvoriť diagram postupností a šípok, kde každá šípka reprezentuje rozdielový krok. Ak obmedzíte vaše skúmanie na všetky postupnosti jednotiek a núl, z ktorých sa stanú **nulové postupnosti** (teda postupnosti, ktorých všetky členy sú rovné 0), potom diagram nazveme ***nulový strom.*** Pre $n = 2$ a $n = 4$ vyzerá nasledovne:



V týchto prípadoch boli v nulovom strome všetky postupnosti. Neplatí to však pre postupnosti dĺžky tri, hoci aj pre tie existuje malý nulový strom:



Výška stromu je počet šípok, ktorými musíte prejsť, aby ste sa prechodom po šípkach dostali z postupností na najvyšších poschodiach do nulovej postupnosti (dolu). Pre každú hodnotu n existuje nulový strom, ale ich výšky sa líšia. Napríklad pre $n = 2$ je výška stromu rovná 2, pre $n = 3$ je výška 1 a pre $n = 4$ je výška stromu rovná 4.

Preskúmajte pravidelnosti vo výške nulového stromu pre rôzne hodnoty n.

Pomôcky

- Vysvetlite, prečo každá nenulová postupnosť v nulovom strome má práve nula alebo dvoch predchodcov.
- Využite svoje riešenie a výsledky z problému 4.
- V probléme 6 je vysvetlené, čo je predchodca postupnosti. Vysvetlite, že postupnosť zložená z núl a jednotiek má predchodcu iba v prípade, že obsahuje párny počet jednotiek.
- Použite myšlienku z rámika nižšie.

Opakovanie postupností

Pri vašom skúmaní sa vám môže zísť nasledujúca myšlienka. Ak máte sériu postupností dĺžky 3, ako je napríklad

1	0	0
1	0	1
1	1	0

tak z nej môžete vytvoriť série postupností dĺžky 6 alebo 9 **opakovaním postupností**:

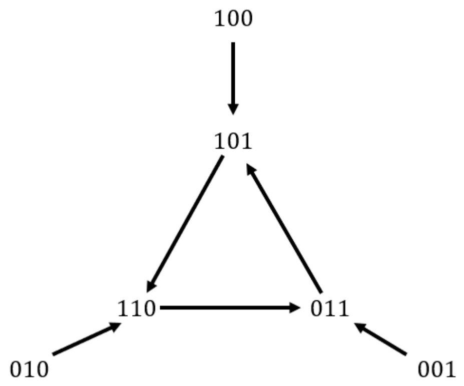
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0

1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0

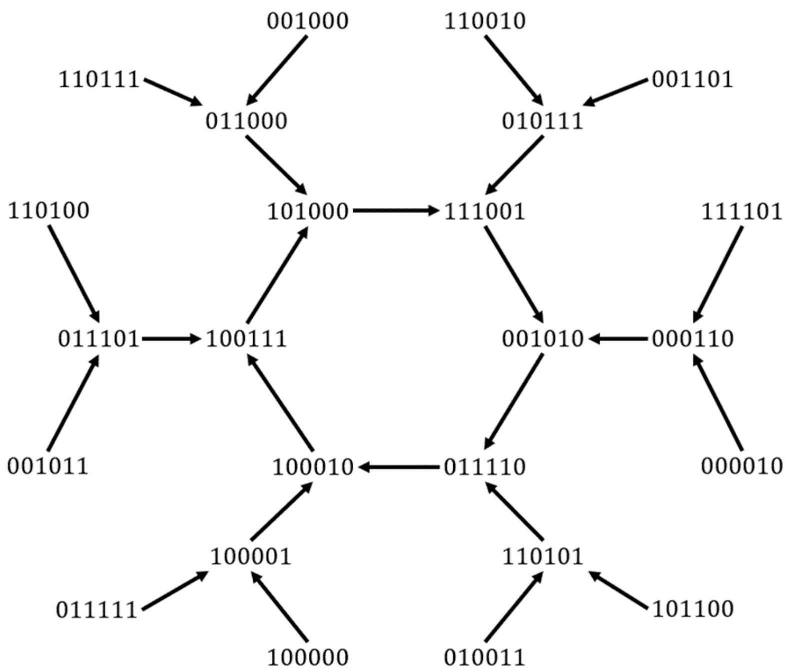
Túto myšlienku je možné zovšeobecniť. Vo vašej záverečnej správe vysvetlite, prečo to takto všeobecne funguje.

ŠTÚDIA 3: VÝVOJOVÉ DIAGRAMY A SNEHOVÉ VLOČKY[4]

V tejto štúdii (podobne ako v predchádzajúcej) sa zameriame na postupnosti vo fáze 2. Pre pohodlnejšiu prácu s postupnosťami predpokladajme, že nenulový člen postupnosti má hodnotu 1. Môžete vytvoriť **vývojový diagram**, ktorý znázorňuje, ako postupnosti medzi sebou súvisia. Pre $n = 3$ vyzerá vývojový diagram nasledovne:



Vľavo vidíte akúsi **snehovú vločku** a napravo posun z $1, 1, 1$ do $0, 0, 0$. Zdá sa, že by ste sa naň mali pozerať ako na malý strom (pozri štúdiu 2). Pre $n = 6$ tiež dostanete snehovú vločku, ale väčšiu. Snehová vločka obsahuje **cyklus** v strede (šesťuholník) a ku každej postupnosti vo vrchole (napríklad 101000) je pripojený strom. Počet rôznych postupností v cykle určuje takzvaný **rád** snehovej vločky. Takže snehová vločka nižšie je rádu 6 a tá vyššie je rádu 3.



[4] V rámci prípravy na túto štúdiu si prečítajte úvod k Štúdii 2, je to potrebné.

Pre $n = 6$ treba k snehovej vločke na obrázku pridať ešte ďalšie dve snehové vločky a nulový strom. Existuje presne $2^6 = 64$ postupností jednotiek a núl. Nájdete ich vo vývojovom diagrame všetky?

Zatiaľ je záhadou, ako sa pre ľubovoľnú dĺžku postupnosti zistí, koľko snehových vločiek a akého rádu obsahuje jej úplný vývojový diagram. Napríklad diagram pre postupnosti dĺžky 9 obsahuje nulový strom (výšky 2), štyri snehové vločky rádu 63 a jednu snehovú vločku rádu 3. Spolu existuje 63 postupností jednotiek a núl. V každej vločke rádu 63 je $2 \cdot 63 = 126$ postupností a snehová vločka rádu 3 obsahuje šesť postupností. Spolu s dvoma postupnosťami v nulovom strome napokon dostávame: $2 + 4 \cdot 126 + 6 = 512$, súčet je teda správny.

Pre rôzne hodnoty n skúmajte, ako vyzerá úplný vývojový diagram postupností jednotiek a núl. Čo viete povedať o počte snehových vločiek? A čo o počte vločiek daného rádu? Vidíte nejaké vzory?

Pomôcky:

- Pre obe dĺžky $n = 3$ a $n = 6$ existuje snehová vločka rádu 3. Nie je to náhoda. Vysvetlite, že platí a zdôvodnite, prečo platí nasledovné: Ak sa cyklus dĺžky k vyskytuje vo vývojovom diagrame pre postupnosti dĺžky n, tak sa cyklus dĺžky k musí vyskytnúť aj vo vývojových diagramoch pre postupnosti, ktorých dĺžka je násobkom n. Aj v tomto prípade vám môže pomôcť myšlienka opakovania postupností (rámik v štúdii 2).
- Bonus: Čo dostanete, ak porovnáte dĺžku stromov pripojených k vrcholom snehovej vločky s výškou nulového stromu (pozrite štúdiu 2) pre rôzne hodnoty n?
- Pomocou generátorov môžete jednoducho popísať a hľadať cykly v snehových vločkách. Pozrite si rámik nižšie.

Generátory

Cyklus dĺžky 15 vznikne pre $n = 5$. Ani to nie je žiadna náhoda. Pozrite sa na postupnosť:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ak sa na túto postupnosť pozriete cyklicky, uvidíte, že podpostupnosť $1\,1$ sa v štvrtom kroku posunula o jednu pozíciu vpravo. Zopakujme tento postup päťkrát: po troch ďalších rozdielových krokoch dostaneme $1\,1\,0\,0\,0$ a tak ďalej, a takto vznikne cyklus. Môžete o $1\,1$ uvažovať ako o generátore cyklu. S podobnou situáciou sa stretnete častejšie, napríklad, vo vývojovom diagrame pre postupnosti dĺžky 17 vznikne vločka rádu 255 generovaná $1\,1$. A dokonca to funguje ešte všeobecnejšie. Cyklus v snehovej vločke je možné popísať tým, že nájdete jeho generátor. Napríklad, štyri vločky rádu 63 pre $n = 9$ môžeme popísať pomocou 11, 1001, 10111 and 11101.