

MATEMATICKÝ B-DEŇ 2022



Yes, we can!
Áno, môžeme!



Universiteit Utrecht

Wiskunde voor
teams



Freudenthal Institute

ÚVOD

O ÚLOHE

Známym reklamným sloganom jednej automobilky je „nič nie je nemožné“. No nemusí to byť vždy pravda. Tohtoročné zadanie súťaže Matematický B-deň je o tom, aby ste spolu s tímom pátrali, či niečo je možné alebo nie. Hlavnú úlohu v zadaní zohráva voda a džbány. Nebojte sa ničoho, vrhnite sa do riešenia a ukážte, že pre vás nič nie je nemožné. Áno, zvládnete to!

ŠTRUKTÚRA DŇA

Toto zadanie Matematického B-dňa pozostáva z úvodných úloh a ďalších, hlbších voliteľných úloh. Na rozdiel od bežných hodín matematiky, v Matematickom B-dni nemusíte vyriešiť všetky úlohy. Ak sa pri niektorej úlohe zaseknete alebo nemáte dostatok času, môžete si ju nechať na neskôr alebo ju dokonca úplne vynechať. Ako pomôcka na vašej ceste k riešeniu vám pri niektorých úlohách poslúžia návrhy a návody. V zadaní sa vyskytujú úlohy s rôznou úrovňou náročnosti, od ľahkých po ťažké, takže nevadí, ak sa vám nepodarí vyriešiť všetko. Avšak aspoň vo vašej záverečnej správe ukážte, čo ste sa snažili vyriešiť a ako ďaleko ste sa dostali - napríklad pomocou návodov. Po tom, čo strávite dostatok času nad úvodnými problémami, vyberte si jeden alebo viacero ďalších problémov, aby ste sa mohli hlbšie venovať danej téme. Práve riešením týchto posledných problémov sa váš tím môže ešte viac odlíšiť od konkurencie!

PRÁCA V TÍMOCH

Zvláštnosťou Matematického B-dňa je, že matematiku robíte ako tím. Môže byť dobrým nápadom urobiť si harmonogram a rozdelenie úloh. Nech každý robí to, v čom je dobrý. Dajte každému priestor, aby mohol prispieť svojimi nápadmi a vypracovaním. Všetci môžete pracovať na rôznych úlohách naraz alebo pracovať na probléme spoločne, môžete o problémoch a riešeniach diskutovať a hodnotiť rôzne prístupy k riešeniu. Pri niektorých problémoch je užitočné naštudovať si niekoľko rôznych prípadov. A práve tu je priestor na delenie práce medzi členmi tímu.

POMÔCKY

Dnes budete potrebovať: pero, dostatok (odpadového) papiera, toto zadanie a počítač alebo notebook na prípravu záverečnej správy, prípadne tabuľkový procesor (napríklad MS Excel) alebo programovací jazyk (napríklad Python). Chceme vás odradiť od používania internetu; ak predsa len použijete online zdroje, uveďte vo svojej správe citáciu (URL).

ČO ODOVZDAŤ?

Počas celého dnešného dňa budete pracovať na záverečnej správe. Nezačínajte s ňou príliš neskoro. Musíte ju odovzdať najneskôr o 16:00. Opíšete v nej svoje výsledky a zdôvodnenia. Porozprávajte svoj vlastný, jasný a presvedčivý príbeh. Oceňujeme dobre napísané a určite originálne a kreatívne riešenia a jasné, presné, úplné, starostlivo formulované záverečné správy.

TIPY:

Môže byť užitočné začať so spisovaním výsledkov už ráno.

Vyjadrujte sa zrozumiteľne: dbajte na to, aby bol text čitateľný aj pre niekoho, kto sa nezúčastnil na Matematickom B-dni (ale má dostatočné vedomosti z matematiky), bez

toho, aby si prečítal zadanie. Do správy nemusíte doslova kopírovať úlohy zo zadania. Namiesto toho z nej radšej vytvorte kreatívny príbeh.

Podstatou Matematického B-dňa je skúmanie a uvažovanie. Ak uvádzate zdôvodnenia, vysvetlenia alebo objasnenia, snažte sa ich čo najviac vytvárať pomocou matematických argumentov. Ak si stále nie ste niečím istí, môžete to v správe uviesť formuláciou, napríklad: "Domnievame sa, že..."

Na ilustráciu svojich myšlienok používajte obrázky. Použite napríklad kópie obrázkov, ktoré ste vytvorili (snímky obrazovky alebo fotografie čísel na papieri).

Do hodnotenia sa započítava nielen matematický obsah záverečnej správy aj spôsob jej napísania!

ÚVODNÉ ÚLOHY

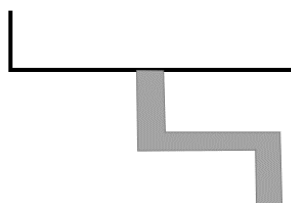
ÚLOHA 1 (JE TO (NE)MOŽNÉ)



5 litrov



3 litre



OBRÁZOK 1. DVA DŽBÁNY, KOHÚTIK A DREZ

Predpokladajme, že máte dva prázdne džbány, päťlitrový a trojlitrový, vodovodný kohútik a drez, z ktorého okamžite vyteká voda (pozri obrázok 1). Povolené sú nasledujúce kroky:

- i. Vyprázdnenie celého džbánu do drezu
 - ii. Úplné naplnenie džbánu vodou z kohútika
 - iii. Prelievanie vody z jedného džbánu do druhého, kým nie je tento džbán úplne prázdny alebo druhý úplne plný
- a. Preskúmajte, či dokážete takto odmerať štyri litre vody, inými slovami, či dokážete naplniť džbán presne štyrmi litrami vody použitím len vyššie spomínaných krokov. Svoje medzikroky vysvetlite v správe.
- b. Preskúmajte, či dokážete odmerať štyri litre aj pomocou nasledujúcich veľkostí džbánov:
- 8 litrov a 3 litre
 - 7 litrov a 3 litre
 - 6 litrov a 3 litre

V správe vysvetlite, akým spôsobom ste situáciu skúmali. Môžete použiť tabuľky, v ktorých budete sledovať, v ktorom kroku je v ktorom džbáne koľko litrov vody, napríklad ako je uvedené nižšie pre prípad 8 a 3 litrových džbánov:

Stav	8 litrový	3 litrový	
0	0	0 ↓	Naplň trojlitrový džbán
1	0	3	
2	3	0 ↓	Prelej vodu do druhého džbánu
...	

ÚLOHA 2 (POČET EFEKTÍVNYCH RIEŠENÍ)

Vráťme sa k pôvodným dvom džbánom s objemom päť a tri litre. Štyri litre môžete odmerať viacerými spôsobmi. Samozrejme, môžete najprv desaťkrát naplniť a vyprázdniť päťlitrový džbán, aby sme získali iné kroky, ale to je neefektívne.

Presnejšie povedané, je neefektívne, ak:

- i. Vráťte späť krok, ktorý ste už vykonali predtým (ak to je možné).
- ii. Vyprázdnite čiastočne naplnený džbán do drezu.
- iii. Doplna doležete vodu z kohútika do čiastočne naplneného džbánu.
- iv. Pokračujete, aj keď ste už dosiahli cieľové množstvo

Všetky nasledujúce kroky sú teda neefektívne pre pravidlá i, ii, i, iii:

5 litrový	3 litrový	5 litrový	3 litrový	5 litrový	3 litrový	5 litrový	3 litrový
2	3	2	3	0	0	2	3
5	0	0	3	5	0	5	3
2	3			5	3		
				0	3		

a. Vysvetlite, prečo sú kroky ii. a iii. neefektívne.

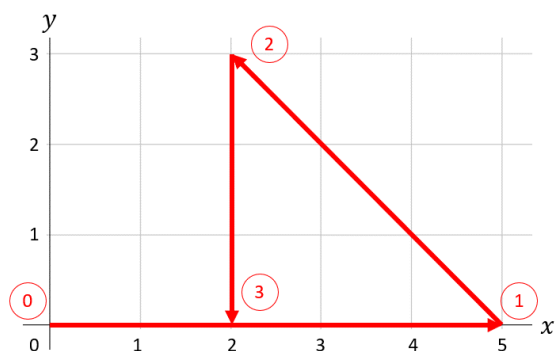
Ak pracujeme neefektívne, existuje nekonečne veľa spôsobov, ako sa dostať k štyrom litrom. Pri efektívnej práci je ich o dosť menej.

Všimnite 5-litrový džbán s x a 3-litrový džbán s y litrami vody. *Krok* znamená prechod zo stavu do ďalšieho stavu, teda naplnenie, vyprázdnenie alebo nalievanie do džbánu. Kroky, ktoré sú súčasťou nasledujúcej tabuľky, možno graficky znázorniť ako cestu v súradnicovej sústave (pozri obrázok 2).

Stav	5 litrový x	3 litrový y
0	0	0
1	5	0
2	2	3
3	2	0

b. Pri rešpektovaní horeuvedených neefektívnych krokov vidíme, že červenú cestu možno predĺžiť len jedným spôsobom. Vysvetlite ako a prečo.

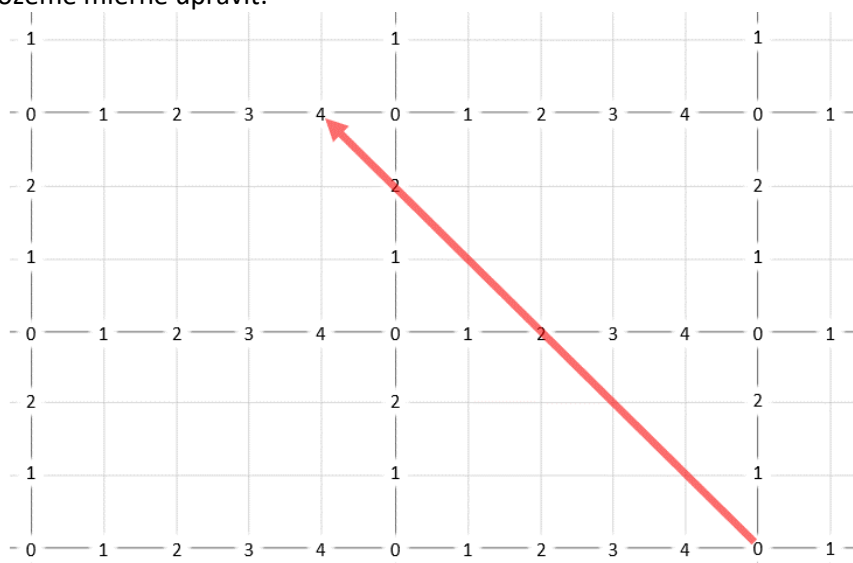
c. Pomocou tohto obrázku preskúmajte, koľko je efektívnych spôsobov, ako odmerať štyri litre vody pomocou 3- a 5-litrového džbánu (začínate s dvoma prázdnyimi džbánmi). Vysvetlite, čo robíte a aké sú vaše argumenty.



OBRÁZOK 1. ŠTYRI STAVY A TRI KROKY (ČERVENÉ ŠÍPKY) PROCESU PRELIEVANIA

EXTRA: SKÚMANIE¹

Obrázok 2 môžeme mierne upraviť.



OBRÁZOK 2. PRELIEVANIE AKO JEDINÁ ŠÍPKA

Kópie mriežky z predchádzajúceho obrázku sme umiestnili oproti sebe (pozri obrázok 3). Koniec koncov, kvôli efektívnosti je vždy jasné, či sa má vyprázdniť plný džbán alebo naplniť prázdny. Dokážete zrekonštruovať šesť krokov znázornených v šípke (celkovo trikrát preliať, dvakrát naplniť, raz vyprázdniť) na obrázku 3? Na tomto obrázku je plnenie a vyprázdňovanie viac implicitné (ak pretínate číselnú čiaru), pričom výhodou je, že namiesto klukatých čiar sa môžeme pozerať len na rovnú čiaru/šípku. Môžete na obrázku ukázať aj iné efektívne riešenie?

ÚLOHA 3 (MÔŽETE POUŽIŤ AJ)

Problém môžete previesť aj do algebry. Pozrime sa ešte raz na proces nalievania, pri ktorom začneme plnením 5-litrového džbánu a po niekoľkých krokoch skončíme so 4 litrami vody v 5-litrovom džbáne.

- Sledovaním toho, čo sa deje krok za krokom, ukážte, že obsah ktoréhokoľvek džbánu v ktoromkoľvek stave možno zapísať v tvare $5k + 3l$, kde k a l (v každom stave iné) sú celé čísla.

To, že v 5-litrovom džbáne môžeme skončiť so 4 litrami, znamená, že existujú **celé** čísla k a l také, že $4 = 5k + 3l$.

¹ Odpovede na túto úlohu nemusíte dávať do záverečnej správy.

- b. Aké hodnoty dostanete pre k a l v tejto rovnici pri prelievaní ako na obrázku 2?
- c. Dokážete tieto hodnoty spojiť s krokmi, ktoré ste vykonali v procese nalievania (t. j. s počtom naplnení, vyprázdnení a vyliatí)?
- d. Dokážete spojiť hodnoty k a l s rovnicou pre čiaru na obrázku 3?
- e. Dokážete nájsť akékoľvek iné hodnoty k a l tak, aby platila rovnosť $4 = 5k + 3l$? Súvisia aj s procesom prelievania? Ako?
- f. Teraz to všetko preskúmajte všeobecnejšie pre proces nalievania s 5-litrovým džbánom a 3-litrovým džbánom:
- skúmajte iné cieľové množstvá ako 4 litre;
 - preskúmajte, aký vplyv má prvotný/počiatočný krok;
 - preskúmajte, v ktorom pohári sa cieľové množstvo objaví ako prvé.

V prípade potreby použite nasledujúcu tabuľku.

Požadované množstvo vody	Možné?	Najmenší počet krokov	Počet prelievaní medzi nádobami	Počet vyprázdnení	Počet naplnení	k	l	Džbán
0	Áno	0	0	0	0	0	0	oba
1								
2								
3	Áno	1	0	1	0	0	1	3
4								
5	Áno	1	0	1	0	1	0	5

ÚLOHA 4

Predpokladajte, že máte m litrový džbán a n litrový džbán, pričom m a n sú kladné celé čísla. Otázka, ktorú sme načrtli už v probléme 1, znie: „Ktoré množstvá h sa dajú alebo nedajú odmerať?“. Všeobecne povedané:

- a. Preskúmajte túto otázku pre džbány s objemom $m = 4$ a $n = 6$ litrov.
- b. Preskúmajte túto otázku pre džbány s objemom $m = 7$ a $n = 2022$ litrov.
- c. Skúmajte túto otázku všeobecne a sformulujte hypotézu. Uvedte argumenty na podporu svojej hypotézy.

Návrhy a návody:

- Urobte grafy ako pri úlohe 3, časť f.
- Použite na to graf ako v úlohe 2.
- Vyskúšajte dostatočné množstvo hodnôt m a n , kým nevidíte vzorec.
- Pokračujte v premýšľaní: Čo spôsobuje tieto vzory?

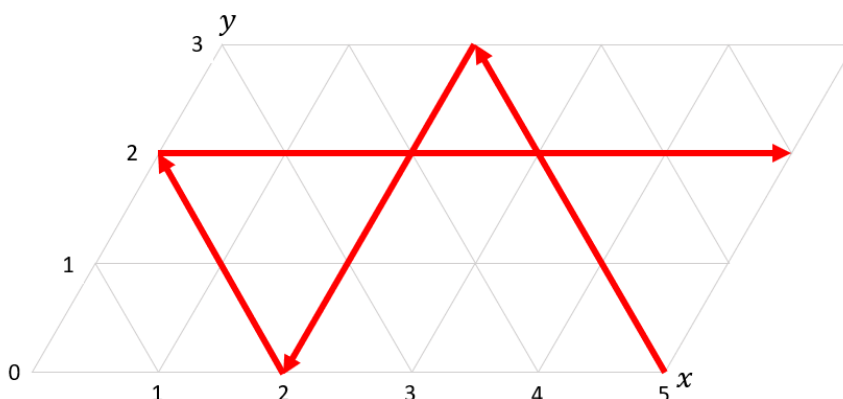
Podobne ako vyššie, môžete vytvoriť rovnicu všeobecne pre množstvo h :

$$h = m \cdot k - n \cdot l$$

Čo vidíte v rovnici o počte prelievaní v súvislosti s k a l ? A čo o počte naplnení? A o počte vyprázdnení? Sformulujte hypotézu. Uvedte argumenty na podporu svojej hypotézy.

ÚLOHA 5 (OD DŽBÁNOV PO BILIARD)

Ak mriežku na obrázku 2 trochu skosíte, dostanete to isté v trojuholníkovej mriežke rovnostranných trojuholníkov. Skvelé je, že kroky potom nasledujú jeden za druhým ako odrazy o hranu, podobne ako trajektória biliardovej gule po biliardovom stole v tvare rovnobežníka.



OBRÁZOK 3. PRELIEVANIA AKO ŠÍPKY V TROJUHLNÍKOVEJ MRIEŽKE

Ak zrealizujete vyššie uvedenú postupnosť krokov zapísanú ako trajektóriu v trojuholníkovej mriežke (prosím, urobte tak), uvidíte, že prechádza cez takmer všetky body mriežky, kým skončí v bode $(0,3)$. Vynechané sú len body $(0,0)$ a $(5,3)$. Rovnako ako pri úlohe 4, aj teraz môžeme meniť rozmery biliardového stola: rozmery nazvime m a n . Pozrieme sa na trajektórie gúľ cez trojuholníkovú mriežku. Vrcholy $(m,0)$ a $(0,n)$ môžu slúžiť iba ako počiatočný alebo koncový bod dráhy; a vrcholy $(0,0)$ a (m,n) nemôžu byť dosiahnuté a neberieme ich do úvahy. Preskúmajte, ako závisí počet dráh od hodnôt m a n .

Návrhy:

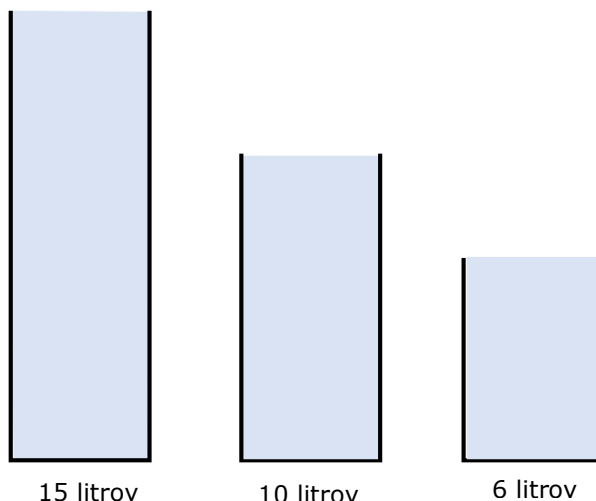
- Preskúmajte dostatok konkrétnych príkladov.
- Opíšte, čo sa deje a prečo.
- Hľadajte zákonitosti.
- Sformulujte hypotézu.
- Uvedte argumenty, prečo by táto hypotéza mohla byť pravdivá.
- Ak sa ukáže, že vaša hypotéza nie je pravdivá, uveďte v správe kontrapríklad: tiež zaujímavé.

VOLITEĽNÉ ÚLOHY

Vyberte si jednu (alebo viac) z nižšie uvedených úloh, ktoré sú hlbším pohľadom na úvodné úlohy.

ÚLOHA 6 (ZOVŠEOBECNENIE)

Predpokladajme, že máte k dispozícii tri džbány.



OBRAZOK 4. ČO DOKÁŽETE S TROMA DŽBÁNMI?

- Riešte úlohu pre tri džbány s objemom 6, 10 a 15 litrov (obrázok 5). Dokážete nimi odmerať 1 liter?
- Môžete na riešenie použiť vizuálny model? Vysvetlite.
- Koľkými efektívnymi spôsobmi sa dá odmerať 1 liter? Dávajte pozor: možno budete musieť zmeniť definíciu slova "efektívny"!
- Preskúmajte, ktoré množstvá sa dajú alebo nedajú odmerať pre džbán s objemom k litrov, džbán s objemom m litrov a džbán s objemom n litrov, pričom k, m a n sú kladné celé čísla. Sformulujte hypotézu. Uvedte argumenty na podporu svojej hypotézy.
- Čo môžete povedať o počte efektívnych riešení v tomto všeobecnom prípade?
- Ďalej zovšeobecnite problém a svoje riešenie. Čo v prípade štyroch, piatich alebo dokonca viacerých džbánov?

ÚLOHA 7 (π -DŽBÁN)

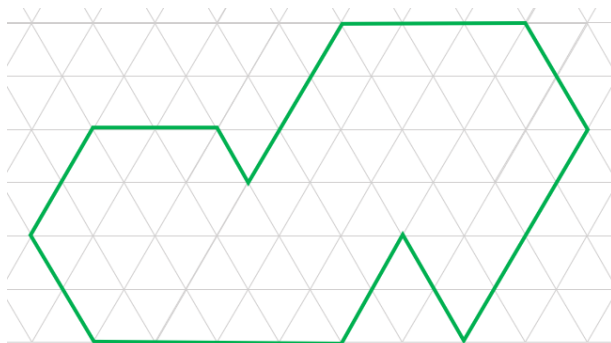
Predpokladajme, že máte dva džbány. Jeden 5-litrový a jeden n -litrový.



- Vysvetlite, prečo nemôžete presne odmerať žiadne z množstiev 1, 2, 3 alebo 4 litre.
- Skúmajte, ako blízko sa môžete dostať k 1 litru. Dokážete to lepšie ako $2\pi - 5$? V správe podrobne vysvetlite, na čo ste prišli. Neuspokojte sa príliš rýchlo. Vymyslite nejaký šikovný spôsob? Ak je to potrebné, použite Python, tabuľkový softvér alebo niečo podobné.

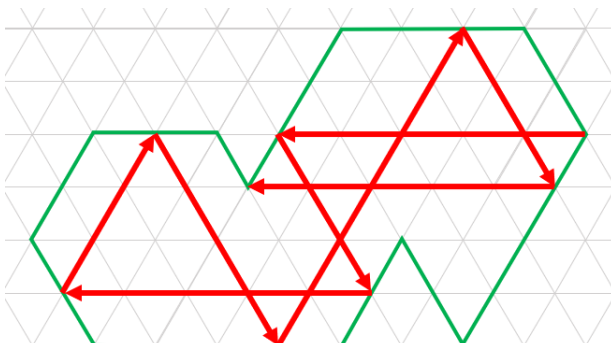
ÚLOHA 8 (BILIARD)

V tejto časti navrhnete vlastné biliardové stoly na trojuholníkových mriežkach. Rohy biliardového stola ležia na bodoch mriežky a strany na priamkach mriežky. Guľa sa kotúľa len po mriežkových čiarach vnútri zeleného okraja.



OBRÁZOK 6. BILIARD NA TROJUHLNÍKOVEJ MRIEŽKE

Diskutujme o rohoch takéhoto biliardového stola. K vrcholom s ostrými uhlami sa vôbec nedá dostať pozdĺž mriežkových čiar. K rohom s tupým uhlom sa dá dostať, ale potom sa nedá povedať, ktorým smerom sa guľa odrazí. Preto tieto vrcholy používame len ako počiatočný alebo koncový bod trajektórie. Napríklad:

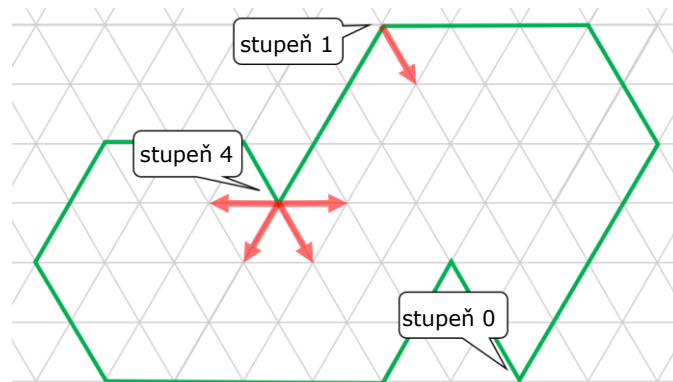


OBRÁZOK 5. PRÍKLAD DRÁHY ZAČÍNAJÚCEJ A KONČIACEJ V ROHOVOM VRCHOLE

V úlohe 5 ste hľadali vzorec pre počet dráh pre biliardový stôl v tvare rovnobežníka s rozmermi m na n .

- a. Dokážete nájsť takýto vzorec aj pre trojuholníkový biliard s rovnakými stranami dĺžky n ? Dokážete navrhnúť nejaké ďalšie triedy/skupiny biliardových tvarov, ktorých počet dráh viete vypočítať pomocou rovnice?

Stupeň rohového vrcholu je počet smerov, ktorými môže dráha prísť (alebo odísť) do tohto bodu.



OBRÁZOK 8. STUPEŇ VRCHOLA BILIARDOVÉHO STOLA

- b. Čo môžete povedať o súčte všetkých stupňov vrcholov biliardového stola? A o vzťahu medzi počtom dráh a súčtom stupňov? Čo môžete povedať o stupňoch vrcholov vo vašich návrhoch v časti a., čo o vzťahu k príslušným rovniciam?