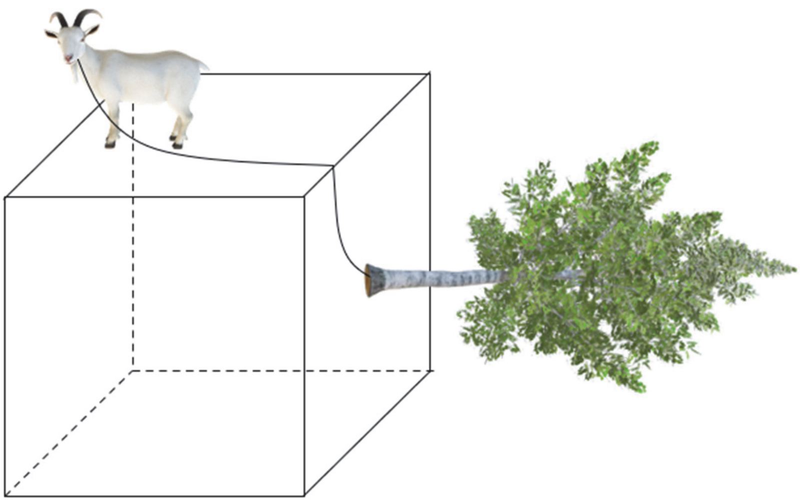
UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE
FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED A INFORMATIKY

Geometria na povrchu



Matematický B-deň 2021

Universiteit Utrecht

Wiskunde voor teams
Freudenthal Institute

Úvod

O zadaní

Väčšina ľudí si pamätá najmä poznatky z geometrie v rovine: dve priamky pretínajú alebo sú rovnobežné; množina bodov rovnako vzdialených od iného (pevne zvoleného) bodu sa nazýva kružnica; súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180 stupňov. Pre vás sú to známe fakty a základné vedomosti z geometrie. Matematici však vlastnosti geometrických objektov skúmali aj mimo rovinu, napríklad na nerovných (zakrivených) povrchoch a dialo sa tak už od staroveku. Možno ste už počuli o sférickej geometrii – o geometrii na guľovej ploche. Guľovou plochou je, napríklad, povrch našej planéty Zem. Poznatky sférickej geometrie sú dôležité pre satelitné dráhy alebo tiež pre skúmanie a dokumentovanie spôsobu šírenia vibrácií zemetrasenia. Vás dnes čaká podobné dobrodružstvo. Budete sa zaoberať geometriou na povrchu kocky, kvádra alebo iného mnohostenu. Takéto matematické poznatky sú dôležité pre pochopenie vibrácií naprieč budovou alebo na výpočet vzdialeností pri pohybe po povrchu objektu. Je ľahké nakresliť kruh na guľu, ale čo ak uvažujeme o mnohostenoch? Ukazuje sa, že známe skutočnosti sú prekvapivo iné!

Štruktúra dňa

Zadanie Matematického B-dňa pozostáva z úvodných a záverečných úloh. Na rozdiel od bežných hodín matematiky, nemusíte riešiť všetky úlohy z Matematického B-dňa. Aby sme vám pri riešení pomohli, ku každej úlohe existujú návodné otázky a úlohy. Ak neviete úlohu vyriešiť alebo na ňu nemáte dostatok času, môžete túto úlohu preskočiť alebo do vašich riešení zahrnúť iba časť, ktorú ste vyriešili (prípadne riešenie návodných úloh). Snažte sa ponechať si polovicu dňa na záverečné zadanie, takže sa úvodnými úlohami nezaoberajte príliš dlho. Zadanie obsahuje veľa úvodných úloh, od ľahkých po ťažké, takže nech vás neodradí, ak nestihnete dokončiť riešenia všetkých úloh, ale napíšte, ako ďaleko ste sa v riešení dostali. Úlohy s číslami 6, 7 a 8 sú záverečné problémy. Po tom, ako ste venovali dostatok času riešeniu úloh 1 až 5, vyberte si jeden alebo viacero záverečných problémov, aby ste sa do témy ponorili hlbšie.

Úspechom v riešení záverečných problémov sa váš tím môže výrazne odlíšiť od riešení ostatných tímov!

Práca v tímoch

Jedinečnosť súťaže Matematický B-deň spočíva v tom, že matematiku riešite a navzájom spolupracujete v tíme, ako napríklad pri futbalovom zápase. Možno by bolo dobré pripraviť si harmonogram a rozdelenie úloh. Nech každý robí to, v čom je najlepší. Dajte každému členovi tímu priestor, aby prispel nápadmi a vypracovaním riešenia. Môžete pracovať na rôznych úlohách súčasne alebo spolupracovať na riešení toho istého problému a následne sa znova stretnúť, aby ste prediskutovali a zhodnotili svoje riešenia. Pri riešení niektorých úloh je užitočné preštudovať si rôzne príklady. To je niečo, o čo sa dá ľahko podeliť s celým vaším tímom.

Pomôcky

Dnes budete potrebovať: pero, dostatok papiera, nožnice, lepiacu pásku alebo lepidlo, ďalej toto zadanie a počítač alebo notebook na prípravu správy o riešeniach a skúmaniach vášho tímu. Používanie internetu je povolené (v správe jasne uveďte URL adresu zdroja), ale nie vždy to môže byť užitočné.

Čo odovzdať?

Počas dňa budete ako tím pracovať na jednej spoločnej záverečnej správe. Nezačínajte písať správu príliš neskoro. Musíte ju odovzdať o 16:00. V správe popíšete svoje riešenia, výsledky a úvahy. Správa by sa mala týkať najmä výskumu v rámci riešení záverečných problémov. V správe vyrozprávajte svoj jasný a presvedčivý matematický príbeh. Ceníme si dobre napísané, jasné, presné, úplné, starostlivo formulované a určite originálne, tvorivé a lyrické záverečné správy.

Tipy:

- Naplánujte si čas a rozdeľte úlohy medzi členov tímu. Môže byť užitočné začať s popisom riešení prípravných úloh do správy hneď ráno.
- Buďte zrozumiteľní: zabezpečte, aby bola vaša práca čitateľná aj pre niekoho, kto sa nezúčastnil Matematického B-dňa, ani si neprečítal zadanie, ale má dostatočné znalosti matematiky. Úlohy zo zadania nemusíte do správy kopírovať doslovne. Namiesto toho napíšte príbeh.
- Ak popisujete zdôvodnenie, objasnenie alebo vysvetlenie, pokúste sa použiť čo najviac matematických argumentov.
- Na ilustráciu svojich nápadov použite obrázky. Môžete použiť napríklad kópie obrázkov, ktoré ste vytvorili počas riešenia (snímky obrazovky alebo fotografie náčrtov na papieri).
- Pripravte si časový rozvrh dňa a rozdeľte úlohy medzi členov tímu.

Pri hodnotení sa berie do úvahy nielen matematický obsah správy, ale aj spôsob jej napísania!

Úvodné zadania

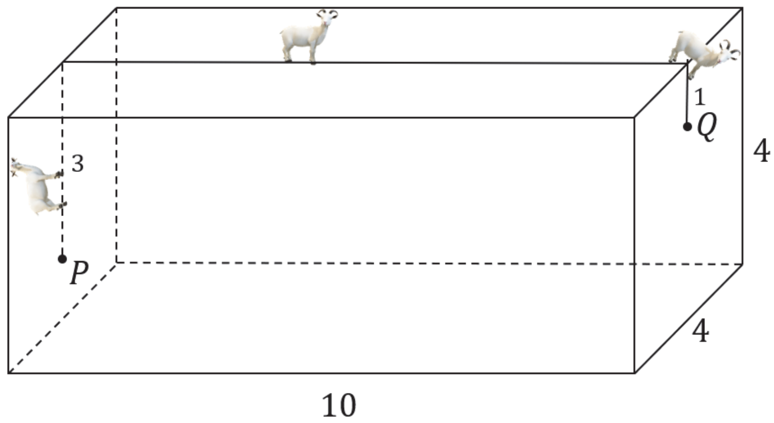
Úloha 1 (Kozie stopy na kvádri)

Na štvorcových stenách kolmého hranola s rozmermi $4 \times 4 \times 10$ ležia body P a Q. Bod P je vo vzdialenosti 3 od stredu hrany na hornej podstave a bod Q je vo vzdialenosti 1 od stredu hrany na hornej podstave (pozri obrázok 1). Koza chce ísť po povrchu tohto kvádra z bodu P do bodu Q. Vyznačená trasa s dĺžkou 14 nie je najkratšia možná cesta.

Skúmajte: Je možné nájsť kratšiu cestu? Aká dlhá je najkratšia cesta, ktorú môžete nájsť? Prečo si myslíte, že nemôže byť kratšia?

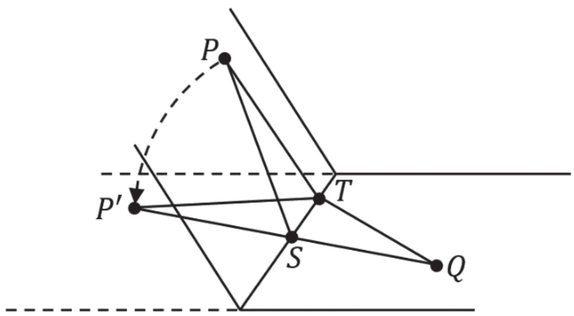
Návodné úlohy

- Z kvádra vytvorte rôzne siete, potom ich rozložte a zložte. Do správy uveďte rôzne výsledky.
- Hľadajte najkratšie cesty na sieťach.
- Ak chcete, môžete si prečítať text pod týmto problémom.



Obrázok 1. Koza kráča po hranole

Mimochodom: Vezmite prúžok papiera a nakreslite naň dva body P a Q a úsečku PQ. Prehnite papier pozdĺž priamky, ktorá pretína úsečku PQ tak, ako na obrázku 2. Priesečník úsečky PQ so skladom nazývame S. Na záhyb umiestnite ďalší bod T. Úsečky PS a QS spolu sa zdajú kratšie ako PT a QT spolu, však? Samozrejme, je to tak, pretože PS a QS ležia spolu na úsečke PQ, čo je najkratšia cesta medzi P a Q v rovine.

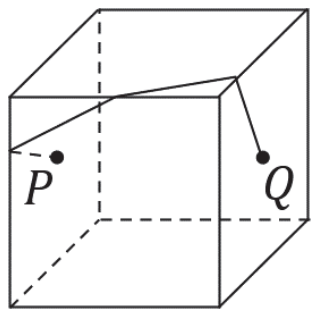


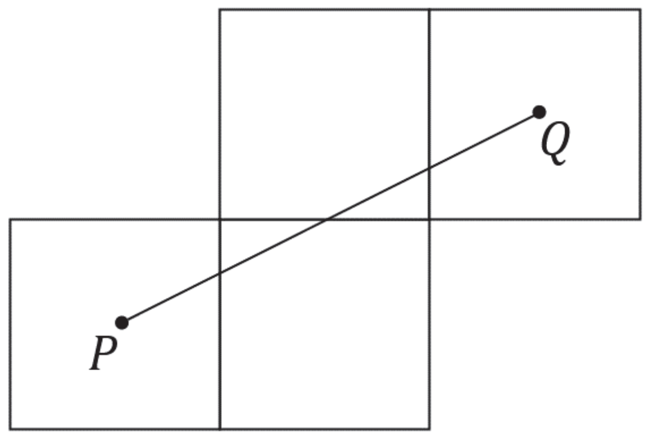
Obrázok 2. Lomená čiara PQ pretínajúca hranu kvádra je na rozloženej sieti úsečka $P'Q$

To, že po rozložení siete podľa ľubovoľnej hrany je cesta medzi bodmi P a Q úsečka, nezaručuje, že táto cesta je zároveň **najkratšou** cestou medzi danými bodmi. To bolo poučenie z problému 1: medzi dvoma bodmi môže byť veľa ciest, ktoré sú po rozložení siete hranola úsečka (a sú úsečky na každej stene), no nie sú to najkratšie cesty.

Úsečka na mnohostene je cesta medzi bodmi P a Q, ktorá je na každej stene úsečka a po rozložení siete mnohostena podľa niektorej hrany, úsečky cesty patriace stenám susedným s danou hranou, ležia na jednej priamke. Úsečka na mnohostene nemôže prechádzať cez vrcholy mnohostena.

Najkratšia cesta medzi dvoma bodmi na mnohostene je úsečka na mnohostene, ale naopak, nie každá úsečka na mnohostene je najkratšia cesta medzi jej krajnými vrcholmi (čo je veľmi odlišné od situácie v rovine!).

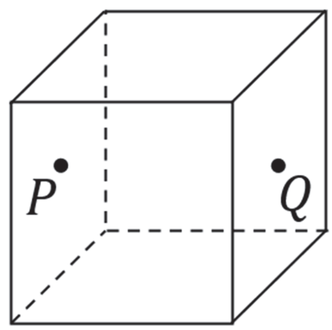




Obrázok 3. Vľavo: Úsečka na kocke – ale nie najkratšia cesta. Vpravo: tá istá úsečka v časti siete

Úloha 2 (Skúmanie úsečiek na kocke)

a. Skúmajte: Nájdite na kocke úsečku, ktorá pretne sama seba a rozpolí sa (pozrite návrhy nižšie).
b. Bod P leží v strede ľavej steny kocky a bod Q priamo oproti nemu v strede pravej steny.
Preskúmajte, koľko existuje úsečiek z bodu P do Q.
Poznámka: úsečka nemusí byť najkratšia cesta (pozri vyššie).



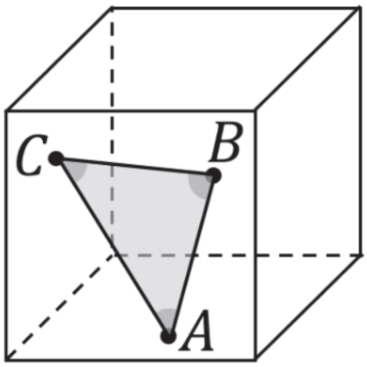
c. Prečo by sme mali súhlasiť s tým, že úsečka nemôže prechádzať cez vrchol?

Návodné úlohy

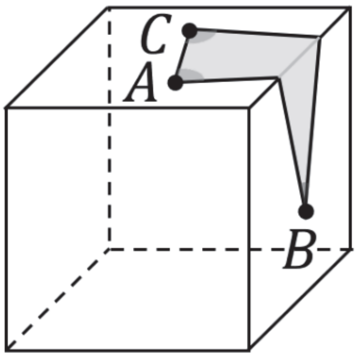
- Vytvorte rôzne siete kocky, v prípade potreby ich položte proti sebe, zložte a rozložte. Hľadajte rôzne možnosti.
- Dôležitá otázka: Môže úsečka pretínať tú istú stenu viac ako jedenkrát?
- Ak máte nápad, skúste aj zdôvodniť jeho pravdivosť; odôvodnite, prečo by ich nemohlo byť viac?

Trojuholník na kocke, podobne ako v rovine, je časť plochy daná troma bodmi, ohraničená troma úsečkami na kocke, ktoré sa navzájom nepretínajú.

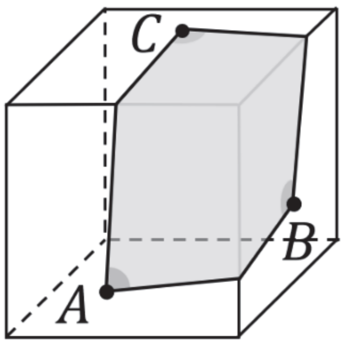
Na obrázku nižšie (Obrázok 4) vidíte štyri príklady trojuholníkov ABC, t. j. sivú oblasť ohraničenú úsečkami na kocke AC, AB a BC. Je to ako naťahovanie elastickej plachty pripevnenej na kocke a upevnenej v bodoch, A, B a C, vrcholoch trojuholníka na kocke.



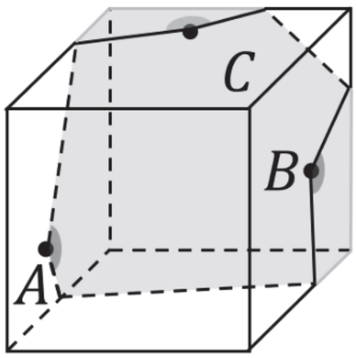
Trojuholník na prednej stene kocky



Trojuholník “prehnutý cez hranu kocky”



Trojuholník “natiahnutý okolo pravého horného predného vrcholu kocky”



Trojuholník “natiahnutý okolo **troch** daných vrcholov kocky”

Obrázok 4. Štyri príklady trojuholníka na kocke

Pri vrcholoch A, B a C vidíte vyznačené vnútorné uhly (uhly na stenách kocky ignorujeme). V rovine je súčet vnútorných uhlov trojuholníka rovný 180 stupňov. V prípade spodných dvoch trojuholníkov na kocke to zjavne neplatí, takže sa tu deje niečo zaujímavé.

Úloha 3 (Súčet uhlov trojuholníka na kocke)

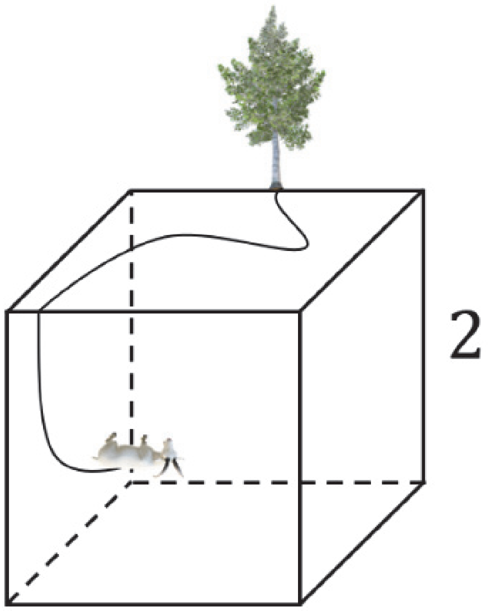
Skúmajte: Aký je súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka na kocke? Vysvetlite! (Pozrite si návodné úlohy)

Návodné úlohy

- Súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka na kocke nie je vždy rovnaký. Ale dá sa sformulovať pekný vzťah. Pokúste sa ho nájsť.
- Pomocou rôznych sietí kocky preskúmajte aspoň šesť príkladov trojuholníkov na kocke, ktoré sa svojím umiestnením čo najviac líšia.
- Formulujte hypotézy o súčte uhlov a otestujte ich na nových príkladoch.
- Ak ste našli vzťah, uveďte dôvody, prečo platí. Príklady trojuholníkov na kocke a čísla môžu pomôcť vysvetliť vaše výsledky, ale vaše argumenty by mali byť všeobecnejšie.

Úloha 4 (Kockový pasienok pre kozy)

Na všetkých stenách kocky s hranou 2 rastie lahodná tráva. V strede jednej hrany je strom, ku ktorému farmár priviazal lanom kozu. Najkratšie lano, ktoré umožní priviazanej koze dostať sa ku



všetkej lahodnej tráve, je dlhšie $\sqrt{13}$ a kratšie ako $\sqrt{17}$.

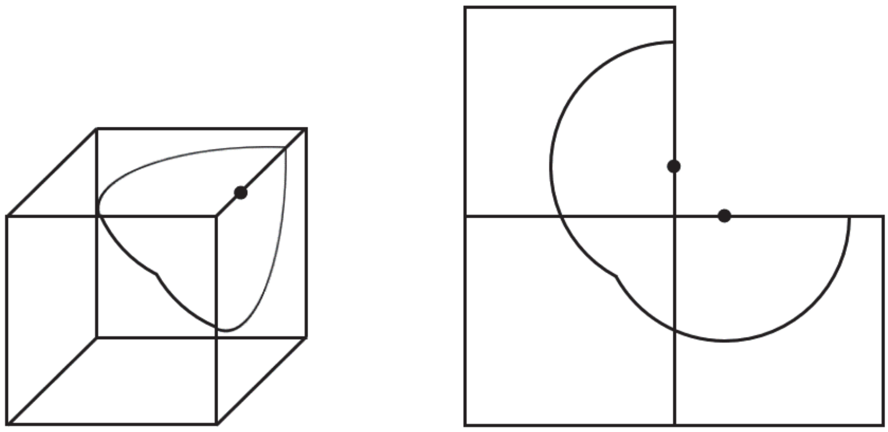
Aká je najkratšia dĺžka lana, ktorú nájdete? Prečo si myslíte, že lano nemôže byť kratšie?

Obrázok 5. Koza priviazaná lanom k stromu na kocke

Návodné úlohy

- Najprv vysvetlite, prečo najvzdialenejšie body **nie** sú vrcholy kocky, a to tak, že nájdete aspoň jeden bod, ktorý je ďalej. Nasledujúce dve úlohy vám môžu pomôcť.
- Nakreslite situáciu z iného pohľadu, resp. smeru.
- Prvé skúmanie môže pozostávať z postupného predlžovania lana a zisťovania, ktoré body môžete dosiahnuť s napnutým lanom. S lanom dĺžky 1 dosiahnete len dva najbližšie vrcholy a pasienok pozostáva z dvoch polkruhov. Potom je to komplikovanejšie…
- Najvzdialenejší bod od stromu sa dá dosiahnuť dvoma (rovnako dlhými) najkratšími cestami. Prečo?
- Ak máte nápad, pomenujte šikovne zvolenú neznámu vzdialenosť x a pokračujte algebrickými úpravami.

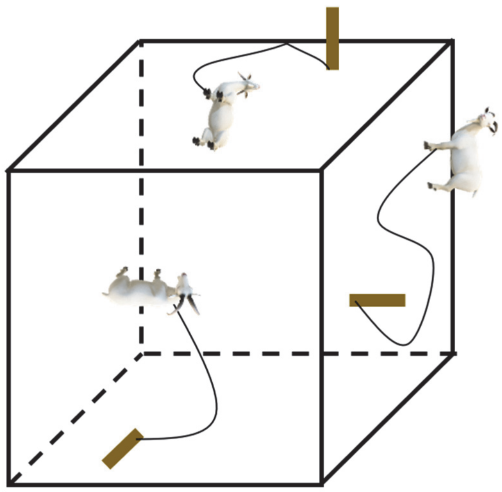
Ak lano zostane napnuté, koza kráča **po mnohostene** v zmysle „bodov v pevnej, rovnakej, vzdialenosti od stredu“, teda po obvode kruhu (kružnici). Zdá sa, že kružnice na mnohostene pozostávajú z niekoľkých navzájom zlepených kružnicových oblúkov.



Obrázok 6. Kruh na kocke. Pozrite si oblúky na stenách (vľavo) a v časti siete kocky (vpravo)

Úloha 5 (Tri pasúce sa kozy)

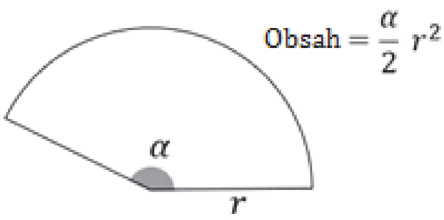
Farmár má tri kozy, ktoré sa môžu pásť na šťavnatej tráve na stenách kocky. Všetky tri sú priviazané k stĺpu, každá svojim lanom. Laná majú rovnakú dĺžku.
Skúmajte: Kde by mal farmár umiestniť stĺpy na uviazanie kôz a aké dlhé by mali byť laná, aby bolo možné spásť čo najviac trávy, ale pasienky, na ktorých sa kozy pasú, sa navzájom nedotýkali? Najlepšie riešenie, ktoré nájdete, opíšte vo svojej správe. Vysvetlite, ako ste ho našli a prípadne vysvetlite, prečo si myslíte, že to nemôže byť lepšie (pozrite návodné úlohy).



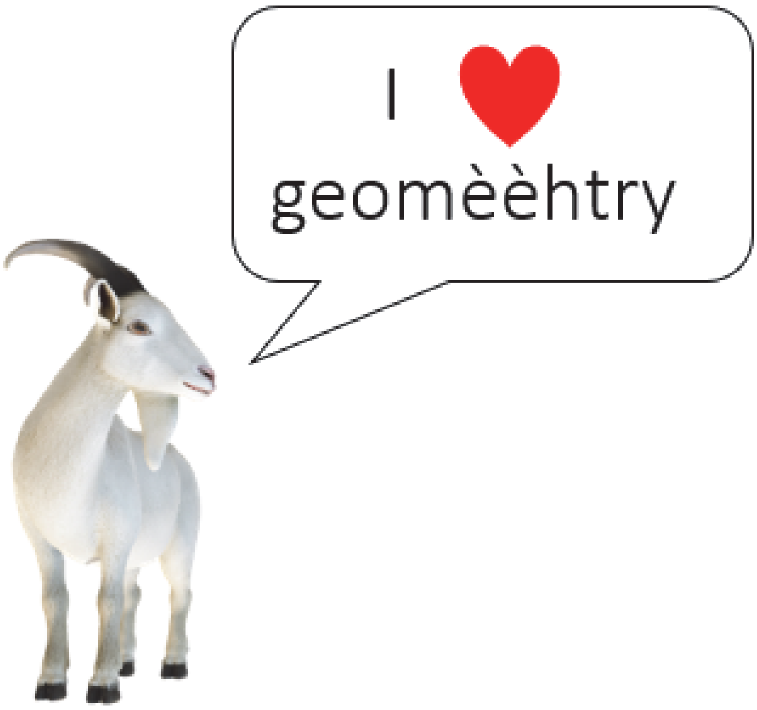
Obrázok 7. Tri kozy pasúce sa na kocke

Návodné úlohy

- V každom prípade, skúste preskúmať množstvo rôznych možností.
- Napadajú vám argumenty, prečo riešenie musí mať určité vlastnosti?
- Vypočítajte dĺžku lana a povrch oblasti. Obsah kruhového výseku s uhlom α (v radiánoch) a polomerom r je $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2$ (prečo?), čo možno zjednodušiť na $\frac{\alpha}{2} r^2$.



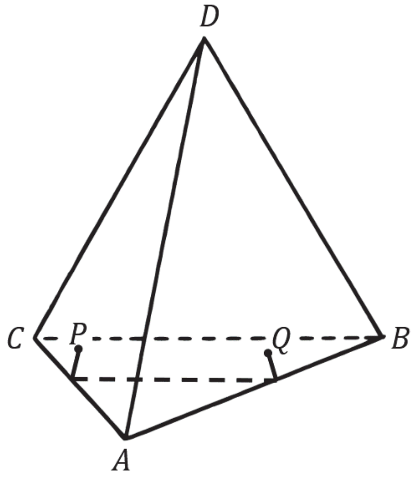
Na výpočet obsahu kruhu na kocke často musíte obrázok rozdeliť na kruhové výseky a trojuholníky ($S = \frac{1}{2} \cdot$ dĺžka strany $\cdot$ veľkosť výšky na túto stranu).



Záverečné problémy

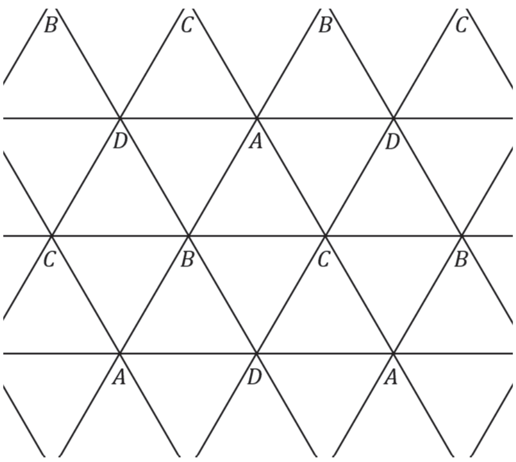
Pozývame vás, aby ste si vybrali jeden (alebo viac) z nižšie uvedených problémov a doplnili či rozšírili vaše riešenia úvodných úloh.

V úlohe 1 ste sa snažili nájsť najkratšiu cestu medzi dvoma bodmi na mnohostene. Zo začiatku bolo vaše hľadanie možno trochu neefektívne a chaotické. Teraz sa pozrime na rovnaký problém na pravidelnom štvorstene. Vieme, že štvorsten je mnohosten so štyrmi stenami v tvare trojuholníkov. Pravidelný štvorsten má všetky štyri steny v tvare zhodných rovnostranných trojuholníkov.



Obrázok 8. Pravidelný štvorsten. Je čiarkovaná cesta najkratším spojením medzi bodmi P a Q?

Najkratšie spojenie sa dá nájsť efektívne pomocou trojuholníkovej mriežky, ktorú si možno predstaviť ako pole zlepených skladačiek sietí pravidelných štvorstenov.



Obrázok 9. Pole zlepených skladačiek sietí pravidelných štvorstenov.

Úloha 6

a. Vysvetlite, ako používať mriežku na obrázku 9, aby ste účinne a efektívne našli najkratšiu cestu medzi P a Q.

Žiaľ, pri iných mnohostenoch nie je také jednoduché zlepiť siete. Teraz je vašou úlohou nájsť iné efektívne a štruktúrované spôsoby, ako nájsť a opísať úsečky a najkratšie cesty medzi dvoma danými bodmi na zvolenom mnohostene.

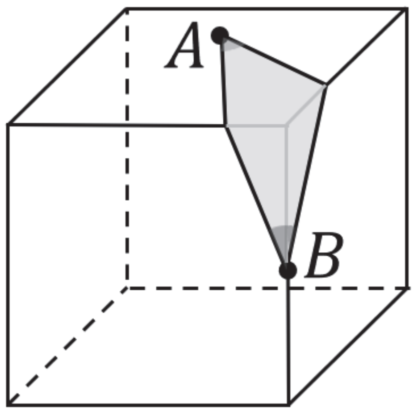
b. Skúste to najskôr pre kocku. Ak vás takéto skúmanie zaujalo, rozšírte svoju metódu na ďalšie mnohosteny.

Úloha 7

V úlohe 5 ste sa pokúsili umiestniť na kocku tri kozy. Dokážete vyriešiť ten istý problém na inom mnohostene a/alebo s iným počtom kôz? Nájdite takú kombináciu mnohostenu a počtu kôz, kde je problém zaujímavý a riešenie dostatočne náročné.

Úloha 8

V úlohe 3 ste skúmali súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka na kocke. A čo súčet veľkostí uhlov ostatných mnohouholníkov? Existujú dokonca takzvané digóny (dvojuholníky) na kocke. Digón je útvar, ktorý má dva vrcholy a dve strany. Existujú dokonca aj monogóny (jednouholníky), útvary s jedným vrcholom a jednou stranou. Pokúste sa rozšíriť svoje zistenia na všetky polygóny (mnohouholníky) na kocke. Okrem toho môžete skúsiť skúmať súčty veľkostí vnútorných uhlov mnohouholníkov na iných mnohostenoch podľa vlastného výberu, napríklad, rozšíriť skúmanie pravidelného štvorstena z úlohy 6.



Obrázok 10. Digón na kocke