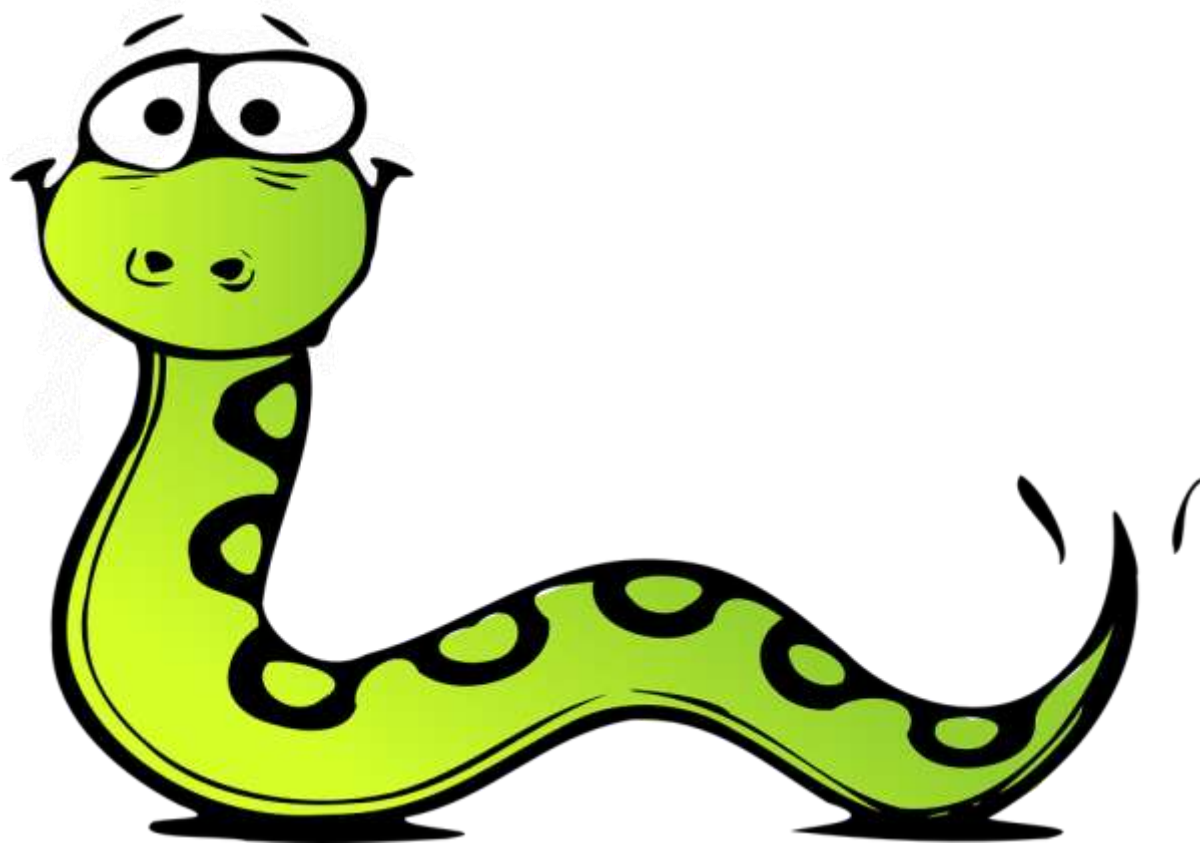


hadíkové hniezdo



Matematický B-deň 2018



Universiteit Utrecht

Wiskunde voor  
teams



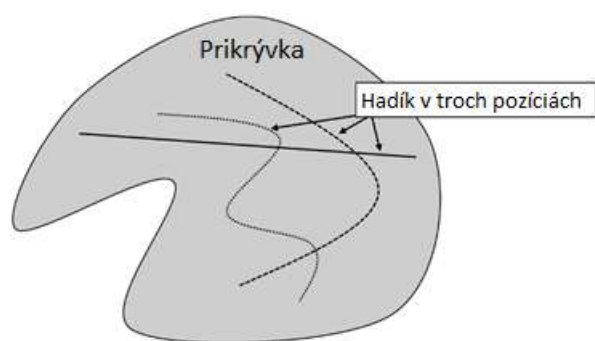
Freudenthal Institute



## Úvod

### O tomto zadaní

Budete riešiť úlohy o malom hadovi, ktorý sa volá Lena a o jej otcovi, ktorý sa volá Marko. Lena má dĺžku iba 15 cm a každý večer, keď ide spať, je jej veľmi zima. Marko je veľmi starostlivý otec. Rozhodol sa, že jej upletie prikrývku. Rodina hadíkov však nemá veľa peňazí a tak Marko musí šetriť s vlnou, z ktorej bude prikrývku pliesť. Marko sa zároveň rozhodol, že upletie čo najmenšiu prikrývku. Navyše, nikdy nevie v akej sa polohe sa Lena k spánku uloží. Preto Marko musí upliesť takú prikrývku, ktorá Lenu prikryje bez ohľadu na polohu, v ktorej bude Lena zaspávať. Problém, ktorý budete dnes riešiť znie: aký tvar a akú plochu by mala mať najmenšia prikrývka, ktorú má Marko upliesť. Prikrývka je pevná a plochá: môže sa iba premiestňovať, nemôže sa rozdeľovať ani skladať a krčiť.



Obr. 1 Tri pozície hada pod prikrývkou

Problém môžeme matematicky formulovať nasledovne: aký je najmenší obsah rovinného útvaru (prikrývky), ktorý pokryje všetky čiary (hadíka) s dĺžkou 15 cm (hadík aj prikrývka sa môžu krútiť, posúvať, alebo otáčať ale iba tak, že všetky čiary budú vždy pod prikrývkou schované). Je to otvorený matematický problém, ktorého riešenie ešte nikto nepozná!

### Rozvrh dnešného dňa

Zadanie dnešného Matematického B-dňa pozostáva z úvodných úloh a zo záverečného zadania. V zadaní nájdete aj špeciálne úlohy, ktoré nemusíte riešiť, ale ak ich vyriešite, pomôže vám to celú problematiku pochopiť hlbšie a získať ďalšie zaujímavé poznatky. Skúste pracovať intenzívnejšie na riešení jednej špeciálnej úlohy (ak sa vám bude páčiť) a vynechať inú špeciálnu úlohu. Polovicu času dnešného dňa by ste mali venovať záverečnému zadaniu. Riešenie záverečného zadania vás prinúti experimentovať a zdôvodňovať; robiť naozajstný výskum v matematike. Každý tím môže v dnešnej súťaži prísť k vlastným originálnym výsledkom.

### Potrebné pomôcky

- 15 cm dlhý kúsok medeného drôtu
- štvorčekový papier
- kružidlo
- nožnice
- lepiaca páska
- počítač alebo notebook
- nepovinné: GeoGebra alebo podobný softvér

## Čo musíte odovzdať?

Vypracujete písomnú správu v elektronickej podobe. Správu odošlete najneskôr o 16:00 hodine. V písomnej správe opíšete vlastnými slovami, presne a zrozumiteľne, všetky riešenia. Sústreďte sa najmä na riešenie záverečného zadania.

Rady:

- Dobre si rozplánujte čas. Rozdeľte riešenie jednotlivých úloh medzi členov vášho tímu. Odporúčame začať s písaním vašej správy, opisom vašich riešení, hneď od rána.
- *Píšte zrozumiteľne*: vašej správe by mal rozumieť každý taký čitateľ, ktorý nepozná zadanie, ale ktorý ovláda matematiku. To znamená, že vaše riešenia musia byť podrobne opísané a komentované.
- Na podporu svojich riešení vždy a všade používajte matematické argumenty, ale najmä vtedy, ak je potrebné opísať, objasniť alebo vysvetliť postup riešenia. Kombinácia matematickej argumentácie s jasným, presným a precíznym vyjadrovaním bude vašou veľkou výhodou!
- Na ilustráciu vašich myšlienok vytvorte a do textu zakomponujte *obrázky*. Môžu to byť fotografie obrázkov na papieri alebo obrázky vytvorené v softvéri a snímky obrazovky počítača.
- Prácu na riešení si dobre *rozplánujte a* v skupine si *jednotlivé úlohy rozdeľte*.

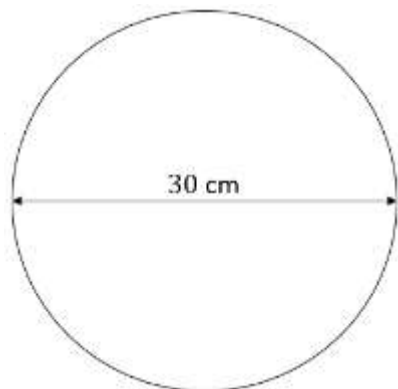
Pri hodnotení vašej správy bude matematický obsah riešení a úroveň písomného prejavu hodnotený rovnocenne!

## Základné zadanie

### Zadanie 1: Kruhov prikryvka

Predpokladajme, e Lena m dĺžku 15 cm a je super tenk: jej hrúbka je 0. Je to mal prun kúsok drtu.

Prv prikryvka, ktor Marko pripraví, je kruh s priemerom 30 cm.



Obr. 2. Kruhov prikryvka

Intuitívne je zrejm, že Lena sa pod prikryvku schová, nech je v akejkoľvek polohe.

Nás ale zaujíma, či je možné, aby prikryvka mala priemer menší ako 30cm.

- (a) Použite drt a skúmajte, ak najmenší priemer by mohla mať kruhov prikryvka, pod ktor sa Lena schová, nech zaujeme akkoľvek polohe.

Samozrejme, zadanie od vás bude vyžadovať viac ako iba experimentovanie. To, prečo prikryvka nevyhovuje, musíte zdôvodniť. Ak budete tvrdť, že tvar alebo rozmer prikryvky vyhovuje *pre všetky polohy*, musíte vysvetliť: *ako?* Ako môžeme zmenť polohe hadka Leny (bez toho, aby sme zmenili jej tvar) a ukázali, že prikryvka ju vždy prikryje?

Predpokladajme, že máme kruhov prikryvku s priemerom 20 cm. Nestačí, keď napíšete:

*“Umiestnme Lenu tak, že jej hlava leží na kružnici a budeme ňou otáčať okolo tohto bodu dovtedy, kým Lena nie je kompletne skryt pod prikryvkou.”*

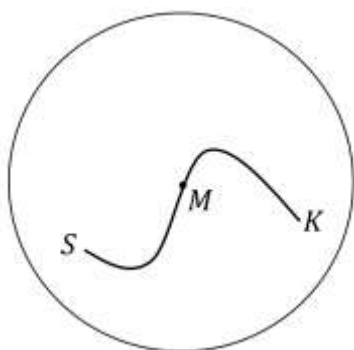


Obr. 3. Kruhov prikryvka s hlavou hada umiestnenou na obvodovej kružnici.

Nebude to vždy pravda!

- (b) Nakreslite obrázok Leny, nájdite tak jej tvar alebo polohe, kedy to nie je pravda (hadk Lena nie je kompletne prikryt). Nov pokus:

*Nech stred kruhu leží v bode M. Umiestnte Lenu tak, že aj jej stred bude ležať v bode M.*



Obr. 4. Kruhová prikrývka, stred kruhu a stred hada ležia v tom istom bode M.

Funguje to. Zdôvodnite, že Lena bude prikryta nech zaujme akukolvek polohu. Uvedte vhodné argumenty.

(c) Vyriešte pre kruh (a).

Opis situácie, v ktorej dokazete, že hadik Lena bude prikryty prikrývku v akejkolvek pozícii, budeme nazývať **stratégia pozície**. Tvrdenia v predchádzajúcom texte, ktoré sú napísané kurzívou, sú príklady opisu stratégií pozície.

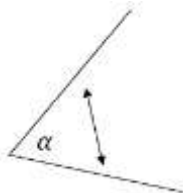
(d) Kruhovú prikrývku s polomerom menším ako v (a) nemôžeme použiť. Vysvetlite čo najpodrobnejšie.

(e) **(špeciálna úloha; poznámka: náročná! Iba pre tých, ktorí majú dostatok času.)** Použite drôt a skúmajte, či sa dá odstrihnúť nejaká časť z kruhovej prikrývky s najmenším možným priemerom (daná v (a)) tak, že zvyšok prikrývky po odstrihnutí je ešte stále prikrývka, ktorá vyhovuje podmienkam. Opíšte príslušnú strategiu pozície a vysvetlite čo najpodrobnejšie, prečo je daná stratégia pozície (pre upravenú prikrývku) správna.

## Zadanie 2: Ohnutý had pod obdĺžnikovou prikrývku

Had sa môže uložiť k spánku v ľubovoľnom tvare. Tvarov hada je teda nespočetné množstvo a preto je náročné úlohy s uvedenou tematikou riešiť. Pokúsme sa riešiť úlohy s tvarmi hadov, ktorí nie sú takí flexibilní ako Lena.

V tejto časti zadania sa obmedzíme na menej ohybné hady, budeme ich nazývať ohnuté hady. Ohnuté hady sa skladajú z dvoch úseciiek, dıžka každej úsečky je 7,5 cm. V bode, v ktorom sa úsečky spájajú, leží kıb (bod ohybu), ktorý je v skutočnosti vrchol uhla týchto dvoch úseciiek. Uhol medzi dvomi úsečkami označıme  $\alpha$ .



Obr. 5. Ohnutý had.

Na začiatku sa obmedzíme na prikrývky tvaru obdĺžnika.

(a) Uvažujme o dvoch obdĺžnikoch. Prvý obdĺžnik má rozmery 14 cm a 5 cm; druhý obdĺžnik má rozmery 15 cm a 5 cm. Modelujte pomocou drôtika a skúmajte, či ohnutý had môže byť prikryty jednou a druhou prikrývku. Ohnutý had môže zaujať

akúkoľvek pozíciu a prikrývka musí vyhovovať každej pozícii. Svoje odpovede vysvetlite a ak je to vhodné alebo nutné, zdôvodnite výpočtami.

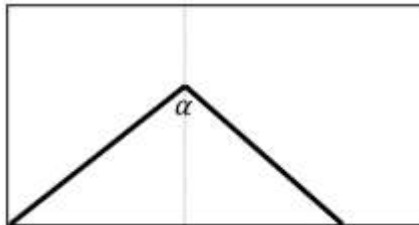
Marko sa pokúša nájsť najmenšiu obdĺžnikovú prikrývku. Skúša overiť nasledujúcu stratégiu pozície:

- pre menšie hodnoty uhla  $\alpha$  umiestni hada tak, že jedna časť hada leží strane obdĺžnika (pozícia 1):



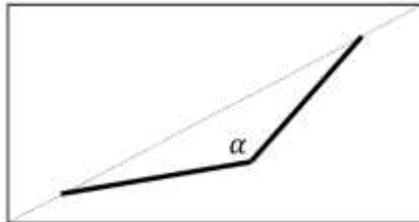
Obr. 6 Ohnutý had, pozícia 1.

- pre väčšie hodnoty uhla  $\alpha$  umiestni ohnutého hada do pozície danej osou súmernosti uhla dvoch úsečiek, ktorá je rovnobežná so stranou obdĺžnika (pozícia 2):



Obr. 7 Ohnutý had, pozícia 2.

- pre najväčšie hodnoty uhla  $\alpha$  umiestni ohnutého hada na uhlopriečku obdĺžnika (pozícia 3):



Obr. 8 Ohnutý had, pozícia 3.

Overme Markovu stratégiu a pokúsme sa nájsť najmenší možný obdĺžnik pre ohnutého hada. Bude to trochu náročné; nenáhlite sa, experimentujte, zdôvodňujte a svoje úvahy si navzájom vysvetľujte.

- (b) Marko pôvodne uvažoval iba o jednej strane (výške) obdĺžnikovej prikrývky. Ak pre vhodný uhol  $\alpha$  vymení pozíciu 1 za pozíciu 2, dostane najkratšiu možnú výšku. Pre akú veľkosť uhla  $\alpha$  to nastane? A akú dĺžku bude mať kratšia strana obdĺžnika??
- (c) Aká je veľkosť uhla  $\alpha$ , pri ktorej Marko umiestni hada z pozície 2 na pozíciu 3? Vysvetlite, urobte a popíšte potrebné výpočty!
- (d) Čomu sa rovná obsah najmenšej obdĺžnikovej prikrývky, ktorú Marko takto nájde?
- (e) Po tom, ako Marko našiel najmenšiu obdĺžnikovú prikrývku, zistil, že z nej môže niektoré časti odstrihnúť. Vidíte to tiež?

Zadania 1 a 2 ukazujú základný prístup k riešeniu problému had-a-prikrývka. K základnému prístupu sa vrátíme neskôr v ďalších zadaniach a v záverečnom zadaní. Základný prístup je zhrnutý v nasledujúcich bodoch.

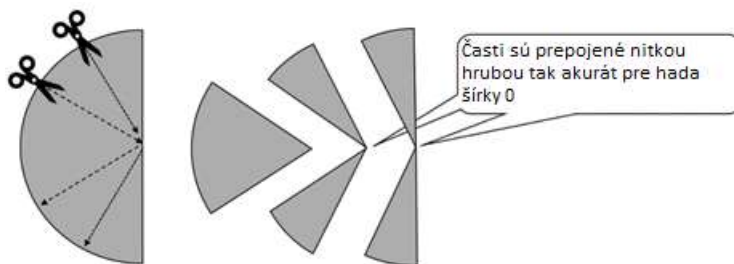
#### Základný prístup

- A. Riešte iba podproblém: vyberte si typ hada a tvar prikrývky, ktorými sa budete ďalej zaoberať.
- B. Experimentujte.
- C. Opíšte *stratégiu pozície* pre všetky možné pozície hada.
- D. Nájdite minimálny rozmer prikrývky.
- E. Vysvetlite, že všetky pozície hada je možné prikryť prikrývkou na základe stratégie opísanej v C.
- F. Dobrovoľná úloha: zmenšite prikrývku: odstrihnite z prikrývky kúsky ale tak, že stále bude vyhovovať podmienkam problému.

Tabuľka 1

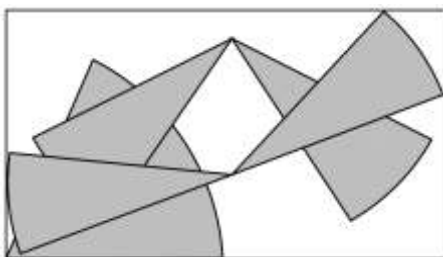
### Zadanie 3: Ohnuté hady a prikrývky v tvare vejára

Pre ohnutého hada môžeme vytvoriť prikrývku aj iného tvaru akým je obdĺžnik. Začneme s polkruhom a vytvoríme z neho tri prikrývky v tvare vejára pre malé, stredné a veľké hady (podľa uhla ohybu hada).



Obr. 9 Šípky ukazujú, že vejáre sú spojené „tenkou nitkou“, ktorá je dosť „hrubá“ aby prikryla hada s hrúbkou tela 0.

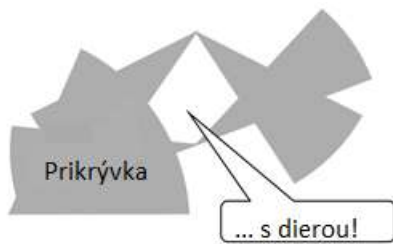
Umiestnite tieto vejáre vhodne do obdĺžnika tak, aby ste dostali menšiu obdĺžnikovú prikrývku, napríklad:



Obr. 10 Obdĺžniková prikrývka s poprekryvanými vejárovými časťami.

Ešte lepšie bude odstrihnúť všetky tie časti obdĺžnika, ktoré sú zbytočné, ktoré nepokrývajú žiadneho hada. Dostanete tak rôzne vtipné menšie prikrývky (možno niektorú aj s dierou):





Obr. 11 V prikrývke je diera!

Počet vejárov je ľubovoľný. Odstrihnúť viac vejárov by možno bolo rozumnejšie.

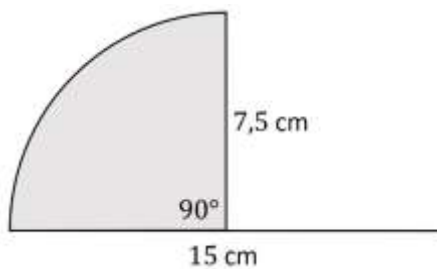
Použite štvorcový papier, narysujte polkruh s polomerom 7,5 cm a nastrihajte ho na vejárové prikrývky (použite kúsok lepiacej pásky na zlepenie vejárov v bodoch, v ktorých sa dotýkajú).

Poposúvajte prikrývky tak, aby sa prekrývali a aby ste získali čo najmenšiu prikrývku; čím menšiu, tým lepšie. Zhotovte fotografiu prikrývky. Na zostrojenie prikrývky môžete tiež využiť softvér GeoGebra alebo iný softvér. Vysvetlite, prečo má vaša prikrývka daný tvar. Ak je to možné, doplňte svoje vysvetlenie výpočtom. Využitím štvorcového papiera môžete vyčíslieť i približný obsah prikrývky.

Uvedomte si, prosím, že podľa typu prikrývky, ktorý ste si vybrali (časť A v Tabuľke 1) existuje viac rôznych tvarov, ktoré môžete optimálne posúvať a prekrývať! To je experimentovanie (časť B v Tabuľke 1). Časti C, E a F sú teraz už pomerne jednoduché, ale časť D je ešte stále celkom náročná.

## Zadanie 4: Prikrývky s pridanou čiarou

Iný typ prikrývok pre **ohnutého hada** má tvar štvrt' kruhu (kúsok okrúhleho koláča alebo pizze) s polomerom 7,5 cm s "veľmi tenkou" čiarou, ktorá je predĺžením polomeru od stredy na opačnú stranu (vedie od stredy štvrt' kruhu doprava, Obr. 12).



Obr. 12 Prikrývka v tvare štvrt' kruhu s pridanou čiarou.

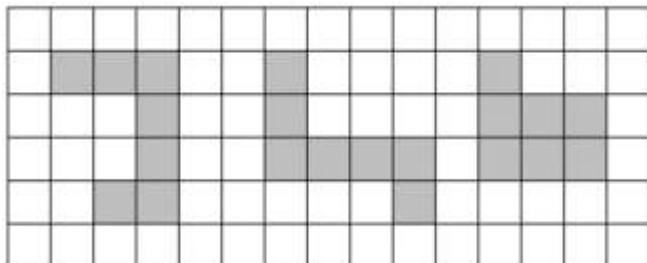
- Použite drôtik a vyskúšajte, či a ako sa ohnutý had zmestí pod prikrývku na Obr. 12. Opíšte stratégiu pozície, ktorú ste našli.
- Dokážete vyrobiť prikrývku podobného tvaru, tvaru kúska okrúhleho koláča so stredovým uhlom menším ako  $90^\circ$ ? A čo takto ešte menší stredový uhol?

Pri riešení časti (b) ste nepochybne odhalili, že prikrývku môžete urobiť tak, že obsah prikrývky môže byť taký malý, ako vám to vyhovuje. Z toho vyplýva, že riešenie problému s ohnutými hadmi sa môže veľmi zjednodušiť. Každopádne, riešiť najskôr zjednodušený problém je veľmi užitočné, pretože nám to pomôže následne odhaliť postupy riešenia zložitejších problémov.

## Zadanie 5: Tetra hady

Úplne odlišná stratégia zjednodušenia problému had-a-prikrývka je umiestniť hada do štvorcovej mriežky a hľadať, napríklad, tetra prikrývky pre tetra hady.

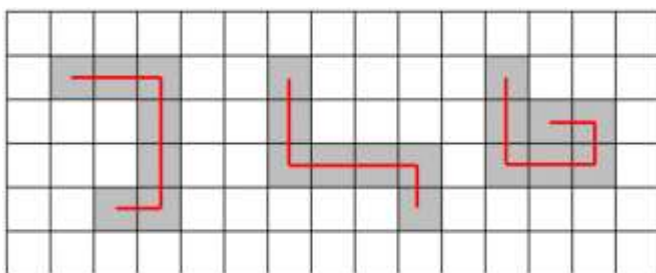
Na obrázku 13 sú niektoré tvary tetra hadov dĺžky sedem.



Obr. 13 Tetra hady dĺžky sedem.

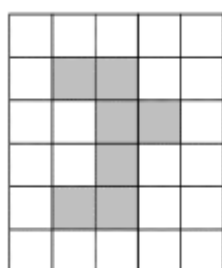
Telo tetra hada tvoria spojené štvorce, ktoré sa vždy dotýkajú jednou stranou, nikdy nie vrcholom.

Stredy štvorcov, ktoré tvoria tetra hada, môžeme spojiť úsečkami. Dostaneme tak lomenú čiaru a podľa jej tvaru vieme určiť, akú pozíciu tetra had zaujal. Uvedomte si, že pre hada vpravo na Obr. 14 existujú ešte dve iné možnosti.



Obr. 14 Pozície tetra hadov dĺžky sedem.

Tvar na Obr. 15 nemôže byť tetra had.



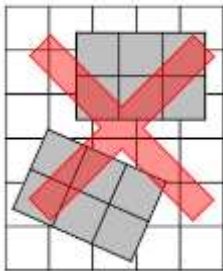
Obr. 15 Na obrázku nie je tetra had.

(a) Nakreslite všetky možné pozície pre tetra hada dĺžky štyri.

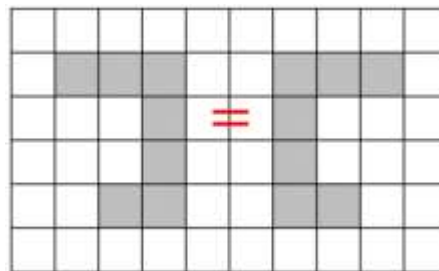
Predtým, ako budeme skúmať vhodné prikrývky pre tetra hady, musíme sa dohodnúť, ako sa budú tetra hady pohybovať (bez toho, aby zmenili svoju pozíciu). Bude platiť:

- Tetra had sa môže posunúť alebo otočiť iba tak, že všetky jeho časti budú po pohybe opäť presne ležať v mriežke. Tetra had nikdy nesmie ležať *naprieč mriežky alebo iba na časti štvorcovej mriežky* (Obr. 16).

- Môžeme vytvoriť zrkadlový obraz tetra hada, “zdvihnúť” tetra hada a preložiť ho na “druhú stranu” (Obr.17).



Obr. 16



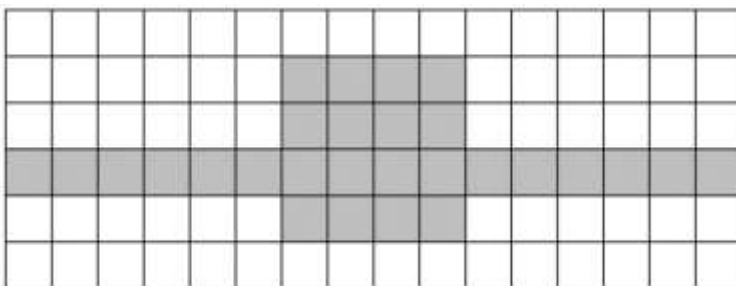
Obr. 17 Zrkadlový obraz tetra hada

V nasledujúcich častiach zadania budete tvoriť prikrývky. Premyslite si opäť pokyny A až F v tabuľke 1.

- (b) Nájdite najmenšiu možnú prikrývku pre tetra hada dĺžky štyri. Opíšte príslušnú stratégiu pozície. Vysvetlite, prečo podľa vás nemôže byť prikrývka menšia.
- (c) Nájdite najmenšiu možnú prikrývku pre tetra hada dĺžky päť. Opíšte príslušnú stratégiu pozície. Vysvetlite, prečo podľa vás nemôže byť prikrývka menšia.
- (d) **(Špeciálna, iba ak máte dostatok času)** Nájdite najmenšiu možnú prikrývku pre tetra hada dĺžky šesť. Opíšte príslušnú stratégiu pozície. Vysvetlite, prečo podľa vás nemôže byť prikrývka menšia.

V riešení (d) môže byť naozaj veľmi náročné opísať, prečo nemôže byť prikrývka menšia. Ak stratégia pozície, ktorú ste našli, je dobrá a ste si istí, že tetra had sa zmestí pod prikrývku v každej pozícii, ktorú môže zaujať, môžete vyhlásiť, že ste našli najmenšiu prikrývku zo všetkých možných prikrývkov. Inými slovami, našli ste hornú limitu pre veľkosť prikrývky.

Môžete tiež hľadať dolné hranice. Napríklad, ľahko sa dá zistiť, že prikrývka pre tetra hada dĺžky 16 by sa mala skladať z najmenej 28 štvorcov: prikrývka musí prikrývať aj skrúteného hada a aj hada, ktorý je úplne vystretý a keďže prienik týchto dvoch tvarov tetra hada dĺžky 16 tvoria štyri štvorce, platí, že minimum je  $16 + 16 - 4 = 28$  štvorcov na prikrývku (Obr. 18).



Obr. 18 Tetra had dĺžky 16 v dvoch polohách

- (e) Nájdite najmenšiu hornú hranicu pre prikrývku pre tetra hada dĺžky šesťnásť. Postupujte tak, že pridáte (minimálne) jednu pozíciu hada a svoje závery presne zdôvodnite.

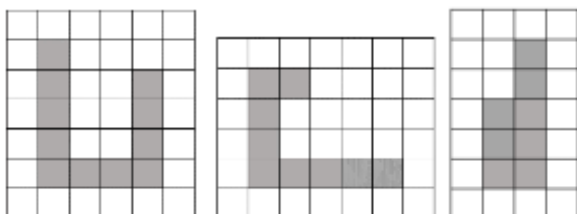
Ohnutím (skrútením) tetra hada dostaneme tetra hada s iba jedným ohybom (ako v zadaní 2), ale tentokrát bod ohybu **neleží** nutne v strede hada.

- (f) Opíšte prikrývku pre ohnutého tetra hada dĺžky  $n$  pre všetky nenulové nezáporné celé čísla  $n = 1, 2, 3, \dots$  Napíšte vzorec s premennou  $n$ , podľa ktorého sa vypočíta

obsah prikrývky. Pomôcka: nájdite najskôr najmenšie prikrývky pre niekoľko prvých hodnôt  $n$  (napríklad pre  $n$  od 1 po 7) a pokúste sa svoje zistenia zovšeobecniť.

### (Špeciálne)

U-tetra had je tetra had, ktorý je dvakrát stočený o  $90^\circ$  takže jeho tvar pripomína písmeno U. Pozrite si Obr. 19.



Obr. 19 U-tetra hady

Stredná časť U-tetra hada (časť medzi ohybmi) môže mať aj dĺžku dva, ako ukazuje pozícia hada vpravo na obrázku 19.

Horná hranica pre obsah najmenšej prikrývky pre tetra hada dĺžky  $n$  je  $n^2$ . Had sa schová pod štvorcovú prikrývku, pričom strana štvorca má dĺžku  $n$ . Pre U-tetra hada bude prikrývka ešte menšia a teda aj horná hranica bude menšia!

- (g) (**Špeciálna**) Napíšte vzorec s premennou  $n$  pre hornú limitu obsahu prikrývky pre U-tetra hada dĺžky  $n$ , ak  $n$  je prirodzené číslo  $n = 1, 2, 3, \dots$

### Zadanie 6: Prikrývka pre všetky pozície

Vráťme sa späť k **všeobecnému** problému! Ako môžete zdôvodňovať, že had sa vždy schová pod prikrývku? V zadaní sformulujeme dôležité návrhy k jednotlivým krokom potrebným k zdôvodňovaniu prostredníctvom dvoch základných otázok a následne ich aplikujeme na prikrývku v tvare kosoštvorca.

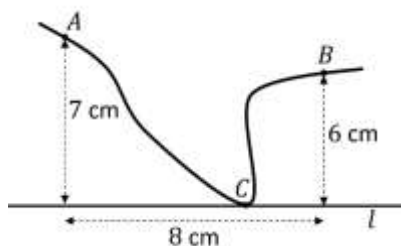
Had má dĺžku 15 cm.

- (a) Predpokladajme, že hlava hada leží v bode  $K$ , bod  $S$  označuje koniec chvosta a telo hada prechádza bodom  $N$  (Obr. 20). Súčet  $|KN| + |NS| \leq 15$ . Prečo?



Obr. 20 Had dĺžky 15,  $K$  je hlava,  $S$  je koniec chvosta,  $N$  leží niekde na tele hada.

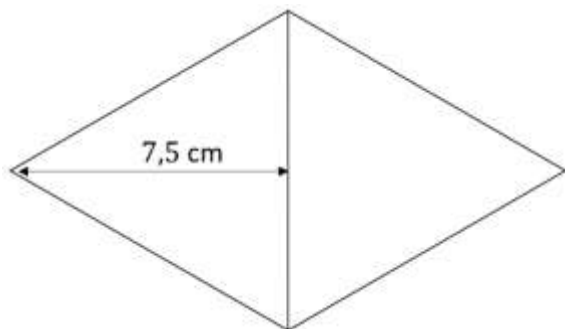
- (b) Predpokladajme, že had pod prikrývkou prechádza bodmi  $A$  a  $B$ . Priamka  $l$  predstavuje hranicu prikrývky. Jednotlivé rozmery sú dané na obrázku 21. Môže had naozaj ležať tak, že leží pri okraji prikrývky?



Obr. 21 Had dĺžky 15 cm prechádza bodmi  $A$  a  $B$ ;  $l$  je hranica prikrývky.

Pomôcka: vytvorte obraz bodu  $B$  a obraz časti tela hada od bodu  $C$  po bod  $B$  v osovej súmernosti podľa priamky  $l$ .

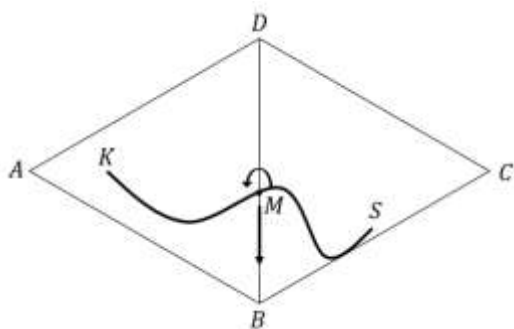
Budeme uvažovať o ľubovoľnej pozícii hada, ale obmedzíme tvar prikrývky: prikrývka je vytvorená z dvoch rovnostranných trojuholníkov, ktoré majú výšku 7,5 cm (Obr. 22).



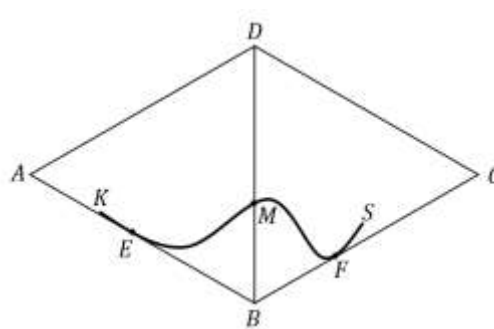
Obr. 22 Prikrývka z dvoch rovnostranných trojuholníkov.

(c) Vypočítajte obsah prikrývky na Obr. 22.

Stratégia pozície (pozrite si obrázky 23 a 24): umiestnime hada so stredom  $M$  na uhlopriečku kosoštvorca (prikrývky)  $BD$  tak, že časť tela s chvostom  $MS$  sa dotýka strany kosoštvorca (prikrývky)  $BC$ . Posúvajte teraz bod  $M$  smerom dolu a zároveň otáčajme hada okolo bodu  $M$  (tak, že časť tela s chvostom sa stále dotýka strany  $BC$ ) až kým sa časť tela s hlavou  $KM$  dotkne strany  $AB$  (Obr. 24). V krajnom prípade bod  $M$  splýnie s bodom  $B$ .



Obr. 23



Obr. 24

(d) Ukážte, že had bude vždy schovaný.

(e) (**Špeciálne**) Môžete nejakú časť prikrývky odstrihnúť?

## Záverečné zadanie

Záverečné zadanie, ktorému by ste mali venovať celú druhú polovicu dnešného dňa, je nasledovné: Navrhňte najmenšiu možnú prikrývku pre hada, ktorý má dĺžku 15 cm. Použite základný prístup k riešeniu problému, ktorý sme už uviedli.

### Základný prístup

- A. Vyberte si typ hada a tvar prikrývky, ktorými sa budete ďalej zaoberať.
- B. Experimentujte.
- C. Opíšte *stratégiu pozície* pre všetky možné pozície hada.
- D. Nájdite príslušný minimálny obsah prikrývky.
- E. Vysvetlite, že všetky pozície hada je možné prikryť prikrývkou na základe stratégie pozície, ktorú ste opísali v C.
- F. Odstrihnite z prikrývky kúsky ale tak, že prikrývka bude stále vyhovovať podmienkam problému.

Uvedené kroky popíšte vo svojej správe. *Nemusíte* sa v písaní obmedzovať tak, ako je to navrhnuté v bode A. Dôležité je, aby ste zrozumiteľne sformulovali *stratégiu pozície* a aby ste svoje úvahy jasne vysvetlili. Na druhej strane, ak sa vám údaj v bode D nedá presne vypočítať, môžete uviesť spoľahlivý odhad. Ak vaše zdôvodnenie v bode E nie je úplne vyčerpávajúce, môžete opísať, ktoré intuitívne úvahy ste využili a ako znie vaša *hypotéza*. Na skúmanie problému môžete využiť softvér GeoGebra alebo podobný softvér.