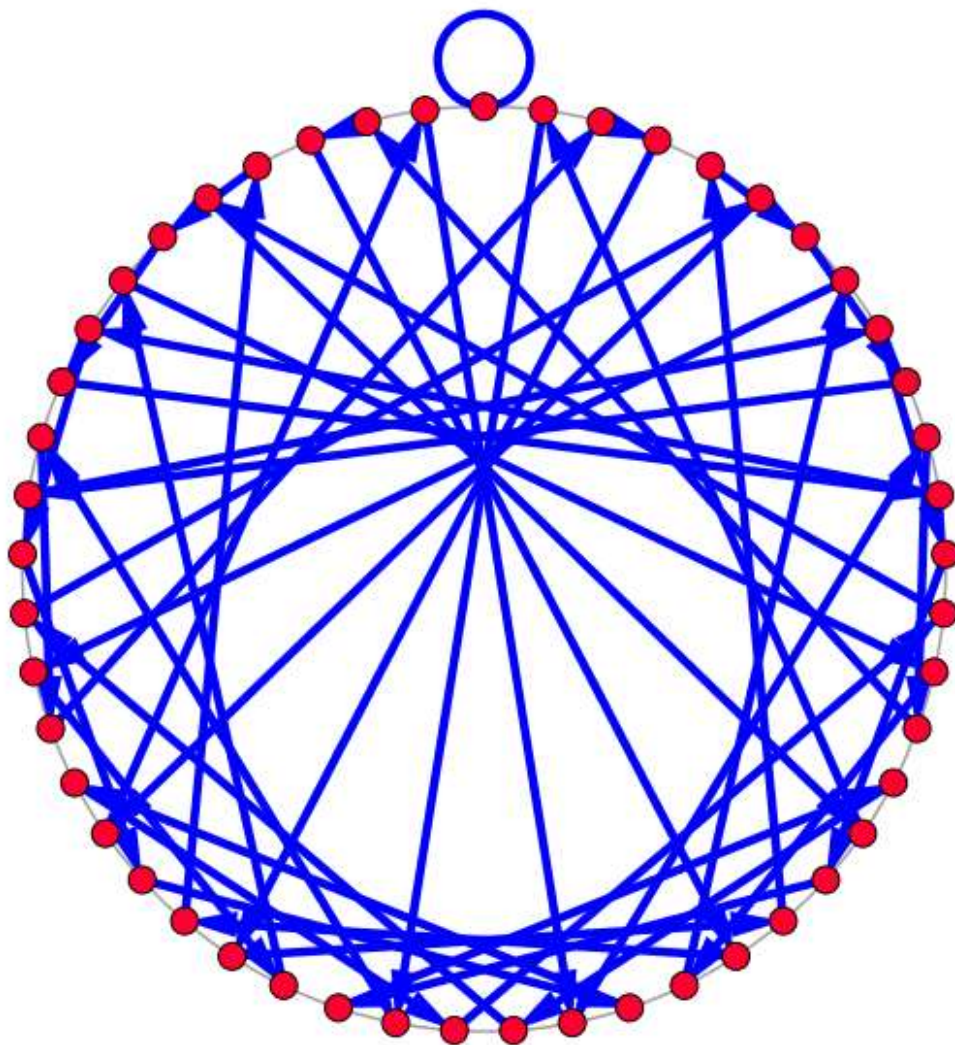


Šípové hodiny



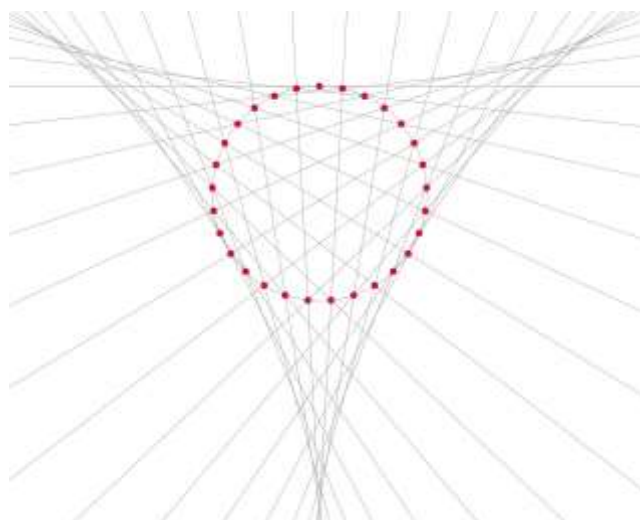
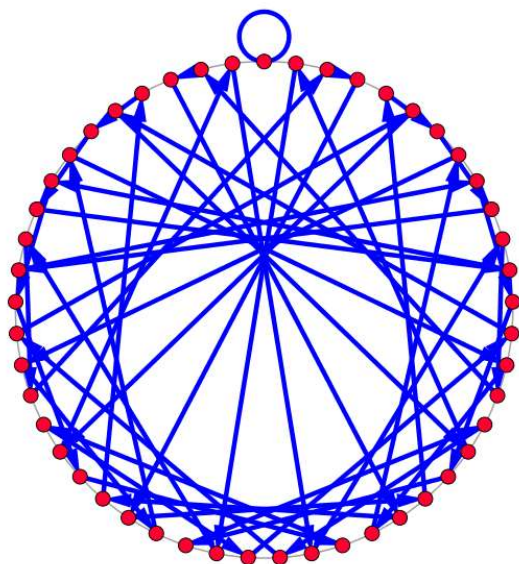
Matematický B-deň 2017

Matematický B-deň ZADANIE 2017

Úvod

O zadaní Matematický B-deň

Ľudia (vrátane teba) sa radi zaoberajú štruktúrami a ornamentmi. Matematika toho o vzoroch a ornamentoch vie oveľa viac. Dnešné zadanie sa zaoberá jednoduchými postupmi, ktoré vedú k nádherným obrázkom. Budeme ich nazývať šípové hodiny a priamky.



Podťe s nami objavovať vzory a štruktúry.

Ako si rozvrhnúť čas dnešného dňa

Zadanie dnešného Matematického B-dňa obsahuje základné zadanie, bonusové zadanie a hlavné zadanie. Pokúste sa hlavnému zadaniu venovať približne polovicu času. V hlavnom zadaní nájdete otvorené problémy, ktoré vás povedú k objavovaniu a skúmaniu. Experimentujte, formulujte otázky, objavujte vzory a vysvetľujte ich vlastnosti. Každý vzor (skupina vzorov) má vlastný príbeh.

Riešenie, vo forme písomnej správy, musí byť odovzdané najneskôr o 16:00 hodine. Dobre si premyslite, ako budete hospodáriť s časom a rozdeľte si riešenie úloh v skupine. Bude veľmi rozumné, ak si písanie záverečnej správy, vrátane všetkých potrebných detailov a vysvetlení, nenecháte až na popoludnie.

Čo musíte odovzdať?

Na konci dňa odovzdáte písomnú správu, vaše riešenie. V správe opíšete výsledky riešení úloh zo zadania, predovšetkým výsledky úloh z hlavného zadania. Vyjadrujte sa zrozumiteľne a čitateľne, zrozumiteľne opíšete svoje riešenia vlastnými slovami.

Niekoľko tipov:

- Píšte zrozumiteľne a jasne: vaše riešenia by mali byť zrozumiteľné aj takému čitateľovi, ktorý nepozná zadanie Matematického B-dňa. Zároveň sa predpokladá, že každý, kto bude vaše riešenia čítať, sa v matematike vyzná. Neodvolávajú sa vo vašich riešeniach na zadanie, ale dostatočne presne opíšete problém a jeho riešenie.

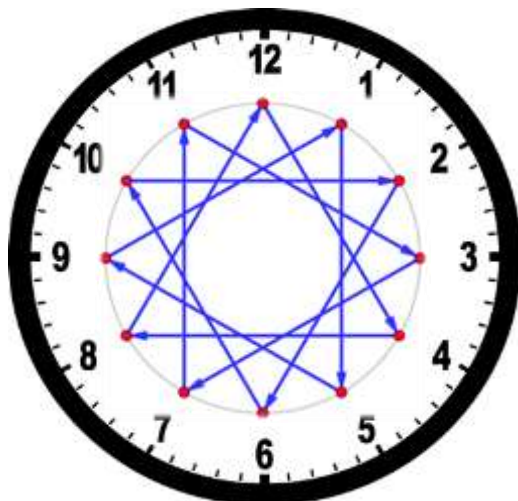
- V opise riešení problémov, pri zavádzaní vlastných pojmov, pri vysvetľovaní a objasňovaní riešenia používajte vždy matematickú argumentáciu. Jasná matematická argumentácia, stručnosť a správnosť vo vyjadrovaní bude vašou veľkou výhodou!
- Na ilustráciu svojich riešení používajte čo najviac obrázkov. Obrázky môžete do textu vkladať ako snímky obrazovky (screenshot), ale na kreslenie môžete tiež využiť pravítko a kružidlo.
- Naplánujte si čas na riešenie rozumne, riešenia jednotlivých úloh si v skupine podel'te.

Pri hodnotení bude kladený rovnaký dôraz na matematický obsah jednotlivých riešení i na spôsob, ako jasne a zrozumiteľne je vaša správa s riešeniami napísaná.

Základné zadanie

Zadanie 1 Hodiny

Na obrázku 1 sú tradičné hodiny. Ku každej celej hodine je priradený (červený) bod. Šípky smerujú od každej celej hodiny k hodine (číslu hodiny), ktorá nastane o 4 hodiny.



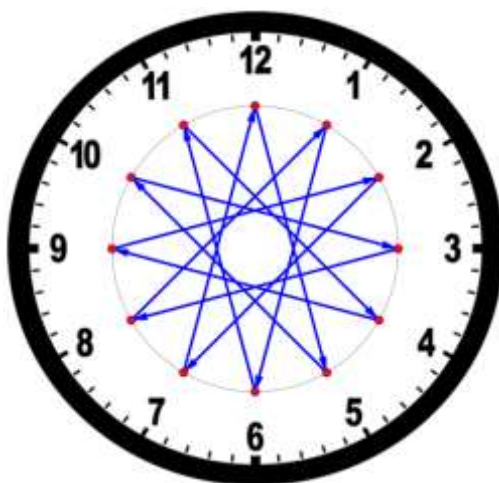
Obrázok 1

Na obrázku 1 vidíte štyri rovnostranné trojuholníky s vrcholmi v (červených) bodoch, ktoré ležia v číslach celých hodín na ciferníku.

- (a) Nakreslite podobný obrázok: šípky budú viesť od každej hodiny k hodine, ktorá nastane o 9 hodín neskôr. Čo vidíte?

Typ hodín z obrázku 1 budeme nazývať šípové hodiny. Oboznámili sme sa so šípovými hodinami, na ktorých šípky spájali hodiny o 4 a o 9 hodín neskôr. V oboch prípadoch šípky tvorili hviezdicovité rovinné útvary a červenými vrcholmi (bodkami) a modrými stranami (šípkami). Ako budú vyzeráť šípové hodiny, ak budú smerovať k hodine (bodu, číslu) o b hodín neskôr, pre $b = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 10$ až 11?

Existujú prípady, v ktorých sa útvar dá nakresliť jedným ťahom, napríklad ak $b = 5$, dostaneme hviezdu na obrázku 2.



Obrázok 2 Dvanásťcípá hviezda

- (b) Zistite, aké typy rovinných útvarov sa vytvoria, ak šípky budú spájať vrcholy pre rôzne hodnoty hodín (o b hodín neskôr, pre b od 1 po 11). Zistite tiež, koľko rôznych typov útvarov dostaneme. Pri kreslení si môžete pomôcť pripojeným pracovným listom.

Predstavme si, že existuje planéta, na ktorej je ciferník hodín rozdelený nie na 12, ale na 15 celých hodín. Riešte podobnú úlohu ako v časti (b): Pre ktoré hodnoty b tvoria šípky viac ako jeden útvar s (červenými) vrcholmi v celých hodinách? Úvaha vedie k najväčšiemu spoločnému deliteľovi b a čísla 15.

- (c) Vysvetlite.
- (d) Nájdite hodiny (iné ako hodiny s 12 alebo 15 hodinovým ciferníkom), ktoré majú iba jeden útvar pre všetky hodnoty b .

Modulárna aritmetika

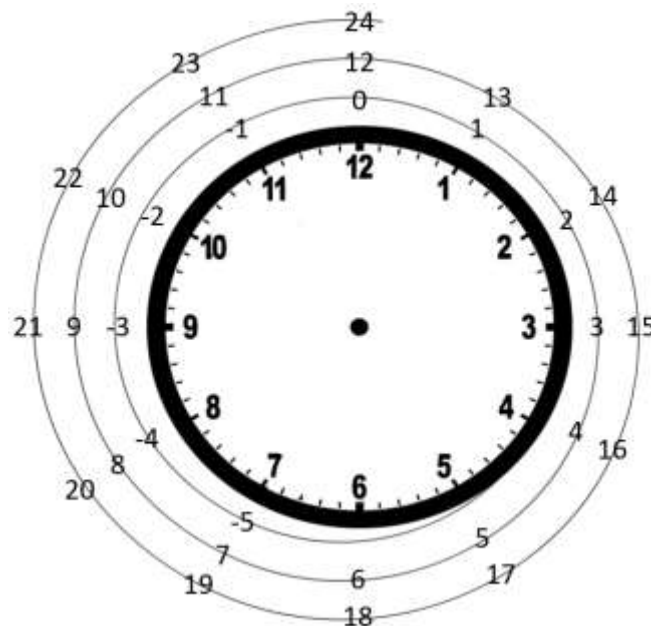
Na obrázku 1 sú hodiny s 12 hodinovým ciferníkom a so šípkami, ktoré môžeme zapísať: $1 \rightarrow 5$, $2 \rightarrow 6$, $3 \rightarrow 7$, ... atď.. Všeobecne, šípky spĺňajú predpis:

$$x \rightarrow x + 4,$$

s jednou dôležitou poznámkou: po 12-tej hodine môžeme znovu začať od 1. Platí: $9 \rightarrow 13$, $10 \rightarrow 14$, ... atď. Zapišeme: $13 \equiv 1 \pmod{12}$, $14 \equiv 2 \pmod{12}$ atď.

Inak povedané $a \equiv b \pmod{12}$, ak rozdiel čísla a a čísla b je násobok čísla 12. Napríklad, $38 \equiv 14 \pmod{12}$ a $100 \equiv 28 \pmod{12}$, ale tiež $7 \equiv -5 \pmod{12}$ a $-11 \equiv 49 \pmod{12}$.

Môžeme si to predstaviť tak, že okolo ciferníka hodín ovíjame číselnú os (Obrázok 3). Čísla $-17, -5, 7, 19, 31, \dots$, sa zobrazia do čísla 7, platí, že čísla $-17, -5, 7, 19, 31$ majú rovnakú hodnotu modulo 12.



Obrázok 3

Skratka "mod" znamená "modulo" a aritmetika, v ktorej sa používa, sa nazýva "modulárna aritmetika".

Súčet $92 \pmod{12} + 74 \pmod{12}$ vypočítame ako $8 + 2 \equiv 10 \pmod{12}$, pretože $92 \equiv 8 \pmod{12}$ a $74 \equiv 2 \pmod{12}$.

Platí to i pre násobenie $92 \cdot 74 \equiv 8 \cdot 2 \equiv 16 \equiv 4 \pmod{12}$.

Pozor: pravidlo nemusí platiť pre delenie!

Je zrejmé, že v modulárnej aritmetike môžeme pracovať i s inými číslami, nie iba s číslom 12 ako s modulo základom.

Zadanie 2 Rovnica rovinného útvaru

V zadaní 1 ste hľadali pravidlo pre predpis

$$x \rightarrow x + b,$$

kde b je celé číslo. V prípade rovnostranného trojuholníka platilo:

$$x \rightarrow x + b \rightarrow x + 2b \rightarrow x + 3b.$$

Posledná šípka sa vrátila do prvého bodu, čo môžeme zapísať $x + 3b \equiv x \pmod{12}$. Ak od oboch strán odčítame x , dostaneme rovnicu $3b \equiv 0 \pmod{12}$.

Rovnica $3b \equiv 0 \pmod{12}$ znamená, že $3b$ a 0 sa od seba líšia o násobok 12. Môžeme písať:

$$3b = 0 + 12k,$$

kde k je celé číslo. Rovnicu vydělíme číslom tri a dostaneme

$$b = 4k.$$

To znamená, že b je násobok čísla 4, alebo inak

$$b = \dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots$$

Záver: pre uvedené hodnoty b dostaneme rovnostranný trojuholník ... s výnimkou 0.

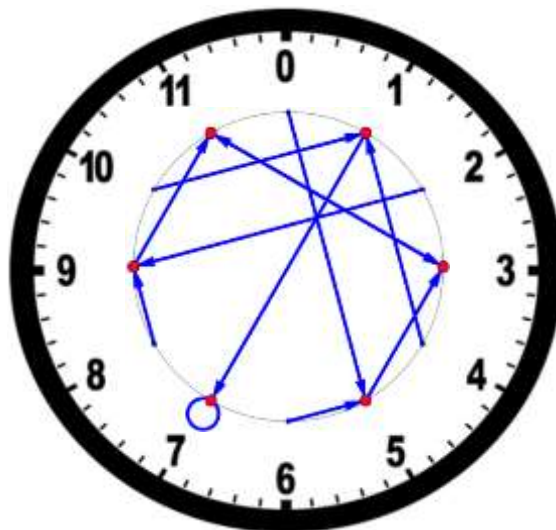
- (a) Prečo sme našli riešenie $b = 0$, ale nenájdeme trojuholník?

Analogickým postupom môžete zistiť, pre ktoré hodnoty b predpis $x \rightarrow x + b$ vedie k pravidelnému päťuholníku na ciferníku hodín, ktoré majú 15 hodín.

- (b) Zapište rovnicu; vysvetlite, na základe čoho ste rovnicu zostavili; rovnicu vyriešte.

Zadanie 3 Pravidlá

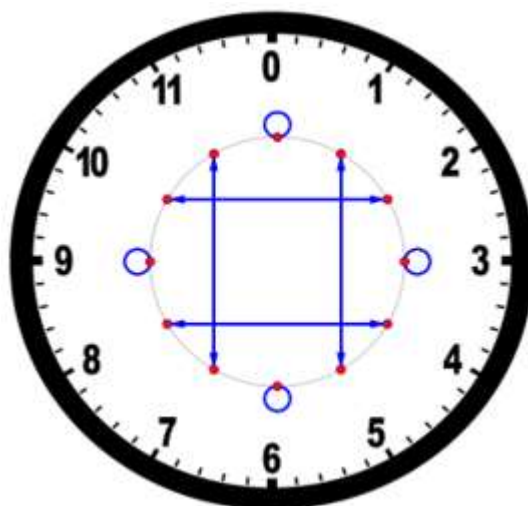
Šípky na hodinách môžeme kresliť podľa rôznych pravidiel, napríklad: $x \rightarrow 2x + 5$. Keďže platí $12 \equiv 0 \pmod{12}$, môžeme číslo 12 na ciferníku nahradiť číslom 0.



Obrázok 4

Slučka na čísle 7 znázorňuje, že číslo je spojené so sebou samým.

- (a) Nakreslite šípové hodiny pre pravidlo $x \rightarrow 3x + 2$ na hodinách, ktoré majú ciferník rozdelený na 12 hodín.



Obrázok 5

(b) Napíšte pravidlo v tvare $x \rightarrow \dots$ pre hodiny na obrázku 5.

A teraz otočte všetky šípky hodín na obrázku 5 o 60° v smere hodinových ručičiek.

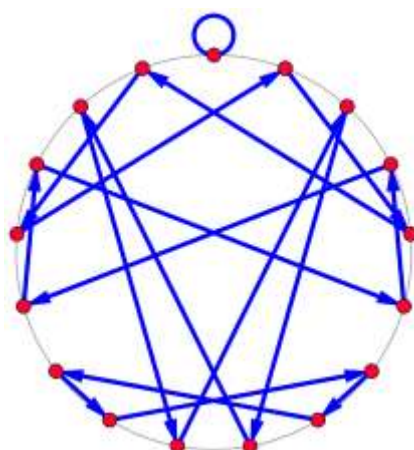
(c) Aké pravidlo platí teraz?

Zadanie Matematického B-dňa sa zaoberá šípkovými hodinami, ktoré sú podobné šípkovým hodinám z predchádzajúcich zadaní.

Doteraz ste riešili úlohy s hodinami, ktoré mali ciferník rozdelený na 12 alebo na 15 hodín, ale ďalej sa už nebudeme obmedzovať konkrétnym číslom. Na označenie čísla, ktoré predstavuje rozdelenie ciferníka použijeme premennú n .

Zadanie 4 Cieľové body

Na obrázku 6 vidíte pekne symetrické šípkové hodiny pre $n = 17$. Určite ste si tiež všimli, že z obrázka 6 je tiež vynechaný ciferník. Pravidlo pre šípkové hodiny na obrázku 6 má predpis: $x \rightarrow 4x$.



Obrázok 6

Bod, v ktorom šípka končí, sa nazýva *cieľový bod*.

Bod, z ktorého šípka vychádza, sa nazýva *počiatočný bod*.

- (a) Výpočtom dokážte, že každý bod je cieľový bod, ak platí predpis: $x \rightarrow 4x$ pre $n = 17$.

Ako to vysvetlíte? Skúmajte ďalej: Sú všetky body cieľové alebo nie?

- (b) Ak platí predpis: $x \rightarrow 2x$ pre $n = 12$, prečo 1 nie je cieľový bod?
- (c) Koľko šípov vedie do každého cieľového bodu, ak platí predpis: $x \rightarrow 2x$ pre $n = 12$?

Predpis $x \rightarrow 4x$ pre $n = 15$ má cieľový bod 1, pretože $4 \rightarrow 1$.

- (d) Využite $4 \rightarrow 1$ na to, aby ste rýchlo našli počiatočné body pre šípky s cieľovými bodmi 2, 3, 4, ..., 14.
- (e) Použite tú istú metódu a zostavte rovnicu, pomocou ktorej sa dá nájsť počiatočný bod pre každý cieľový bod 1, 2, 3, ..., 44; ak $x \rightarrow 4x$ pre $n = 45$.

Zdôvodňovanie o šíповých hodinách bude jednoduchšie, ak si pomôžeme vybranými poznatkami z teórie čísel.

Budeme hovoriť, že číslo a a číslo n sú nesúdeliteľné, ak ich jediný spoločný deliteľ je číslo 1 (inými slovami, ich najväčší spoločný deliteľ je číslo 1, zapíšeme $\text{NSD}(a, n) = 1$).

V uvedenom prípade rovnica $ax \equiv 1 \pmod{n}$ má práve jedno riešenie modulo n .

Bližšie poznatky o uvedených vlastnostiach nájdete v extra zadaní.

Napríklad: číslo 9 a číslo 14 sú nesúdeliteľné; rovnica $9x \equiv 1 \pmod{14}$ má riešenie $x = 11$ a to je jediné riešenie modulo 14, pretože $9 \cdot 11 = 99 = 1 + 7 \cdot 14 \equiv 1 \pmod{14}$. Ak vás to zaujíma, môžete si pomerne jednoducho overiť, že iné riešenie pre x neexistuje.

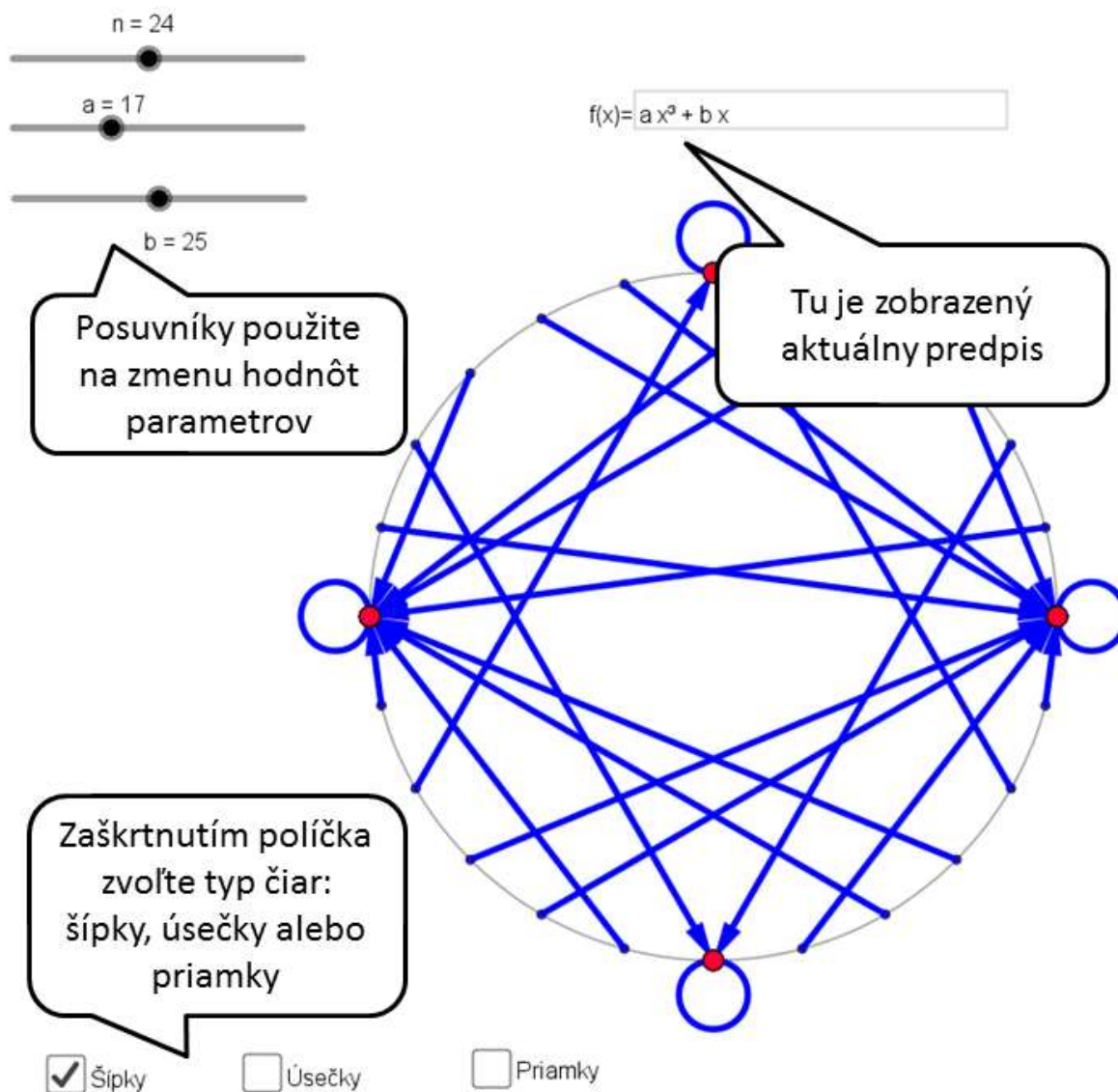
- (f) Riešte: $4x \equiv 1 \pmod{9}$.

Pozrime sa teraz na všeobecný prípad: pravidlo $x \rightarrow ax$ a hodiny sú rozdelené na n hodín.

- (g) Na základe predchádzajúcich poznatkov z teórie čísel vysvetlite, dokážte, že platí: Každé číslo je cieľový bod, ak číslo a a číslo n sú nesúdeliteľné.

Zadanie 5 Aplikácia Geogebra

Chodte na stránku <https://www.geogebra.org/m/YTvZxSnf>. Nájdite na nej online aplikáciu vytvorenú v GeoGebre. Aplikáciu môžete využiť na skúmanie šíповých hodín s rôznymi pravidlami.



Obrázok 7

Na zmenu hodnôt parametrov použite posuvníky vľavo hore. Vyskúšajte si posuvníky. Vľavo dolu si môžete zvoliť typ čiar: šípky, úsečky, priamky, ktoré prechádzajú bodmi na ciferníku.

V okne pre zadanie predpisu môžete zapisovať ľubovoľné predpisy. Napíšte, napríklad, x^2 alebo x^3+b . Po zadání predpisu stlačte *enter*. Pamätajte, že výsledkom predpisu musí byť vždy celé číslo. V predpise môžete využiť parametre a a b , ale musíte ich zapísať oddelene od premennej x ; napríklad “ $a x$ ” alebo “ $a*x$ ”, nikdy nie “ ax ”.

Ak máte softvér GeoGebra nainštalovaný vo svojom počítači, s aplikáciou môžete pracovať aj offline. Stiahnite si .ggb-file cez <https://www.geogebra.org/materials/>. Názov súboru je “Šípové hodiny”.

síповe hodiny



Nástroje vyhľadávania: Všetky typy materiálov ▾ Všetky vekové kategórie ▾

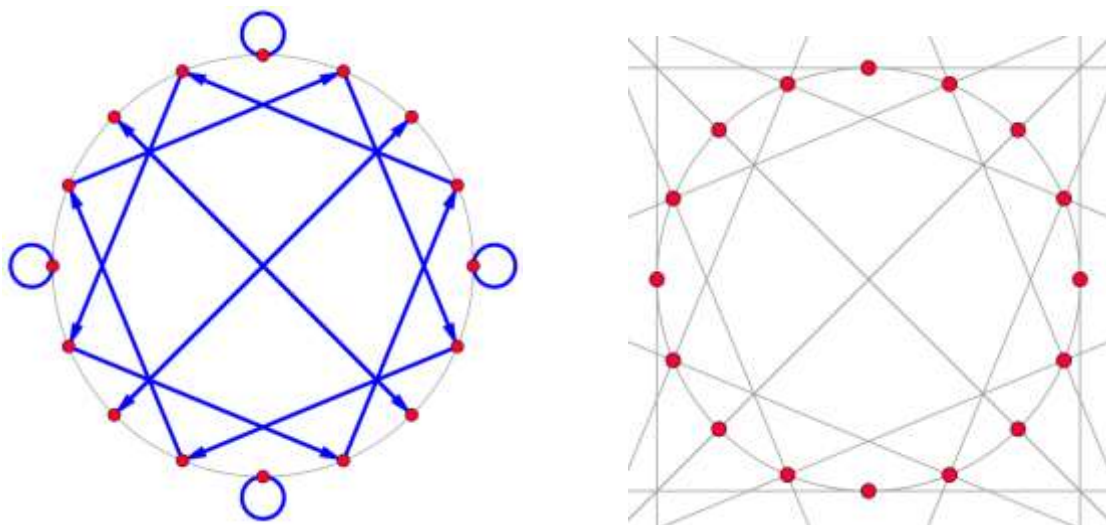
Všetky jazyky ▾

Obrázok 8

Kliknite na tri malé krúžky a následne vyberte možnosť "Stiahnúť" (obr.8). Potom otvorte súbor vo formáte ggb pomocou GeoGebry vo vašom počítači. Súbor pravdepodobne nájdte vo svojom počítači v adresári "Prevzaté súbory". Ak budete s aplikáciou pracovať offline, na vkladanie nových predpisov používajte dolné okno/riadok softvéru GeoGebra. Vkladanie predpisu začnite výrazom " $f(x)=$ ".

Zadanie 6 Priamky

Namiesto šípok môžeme kresliť aj priamky. Pozrite si nasledujúci obrázok 9 pre predpis $x \rightarrow 5x$ a $n = 16$. Obrázok hodín vpravo, s priamkami namiesto šípok, budeme nazývať *priamkové hodiny*.

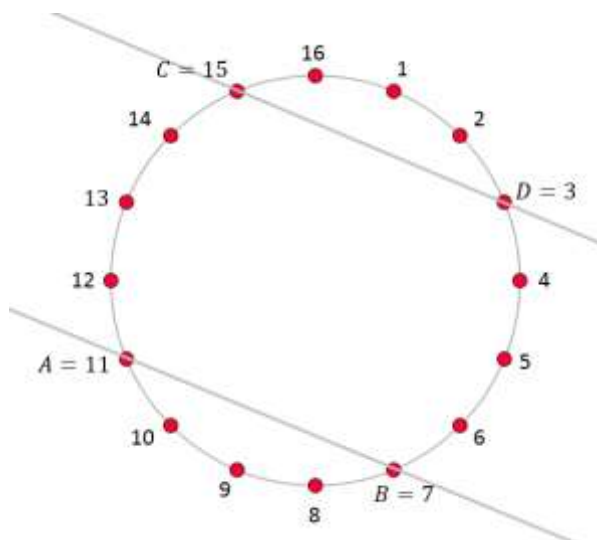


Obrázok 9

Tam, kde sú na šípových hodinách slučky, na priamkových hodinách sú dotyčnice ku kružnici v danom bode. (Prečo je to s tou dotyčnicou dobrý nápad?)

Na obrázku 9 je vidieť niekoľko dvojíc rovnobežných priamok. V zadaní nasledujúcej úlohy sa pokúsime vysvetliť, prečo je to tak.

Pozrite si obrázok 10.



Obrázok 10

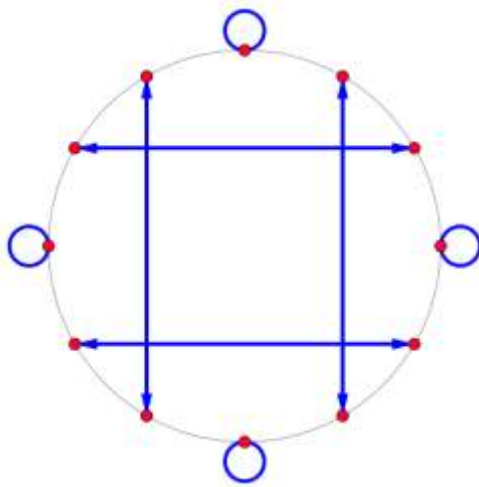
Priamky AB a CD sú rovnobežné.

- (a) Prečo dokážete rýchlo zistiť, aké hodnoty musia mať čísla A, B, C, D ; ak platí, že priamky AB a CD sú rovnobežné? Všeobecnejšie: existuje rovnica pre A, B, C, D ; ktorá presne stanovuje predpis pre rovnobežné priamky AB a CD . Nájdite tú rovnicu.

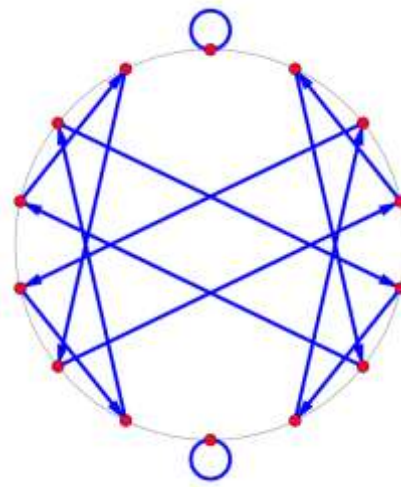
- (b) Použite výsledok z časti (a) pre predpis $x \rightarrow 5x$ a $n = 16$. Dokážete nájsť všetky dvojice rovnobežných priamok?
- (c) Využitím výsledku z časti (a), zdôvodnite, pre ktoré hodnoty n dokážeme nájsť dvojice rovnobežných priamok, ak platí predpis: $x \rightarrow 5x$.
- (d) Vysvetlite, prečo rovnica, ktorú ste našli v časti (a), určuje rovnobežné priamky.

Zadanie 7

V zadaní 3 ste sa zoberali hodinami na obrázku 11.



Obrázok 11



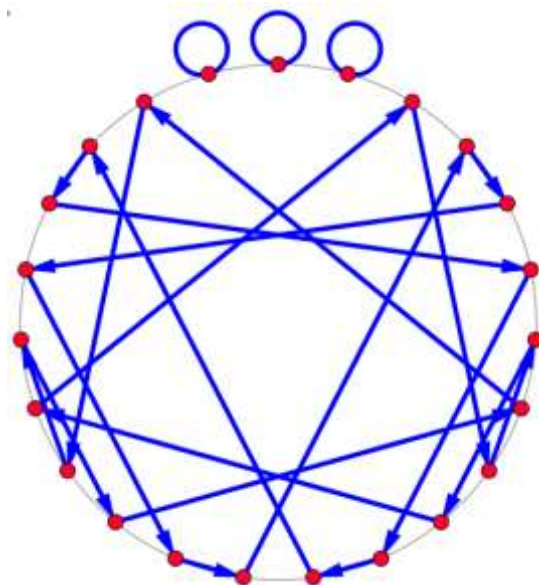
Obrázok 12

Hodiny na obrázku 11 majú štyri slučky. Hodiny na obrázku 12, ktoré majú dve slučky, boli vytvorené podľa toho istého predpisu, ale pre $n = 14$.

- (a) Skúmajte predpis tvaru $x \rightarrow ax$; uvažujte o rôznych hodnotách a a n . Nájdite predpis/rovniciu, v ktorej bude počet slučiek funkciou a a n .
- (b) Vysvetlite predpis/rovniciu z (a).

Zadanie 8

- (a) Experimentujte s rôznymi hodnotami n pre pravidlo $x \rightarrow x^3$ a zapíšte si, čo zaujímavé ste objavili.



Obrázok 13

Možno ste si všimli, že všetky šípové hodiny sú súmerné podľa zvislej osi súmernosti, ktorá prechádza stredom hodín (stredom ciferníka).

- Vysvetlite, prečo sú šípové hodiny vytvorené na základe predpisu $x \rightarrow x^3$, súmerné podľa zvislej osi súmernosti pre všetky hodnoty n .
- Nájdite iné predpisy, na základe ktorých sú šípové hodiny súmerné podľa zvislej osi súmernosti, ktorá prechádza ich stredom. Vysvetlite matematické pravidlá pre uvedenú osovú súmernosť.
- Napište predpis, na základe ktorého budú šípové hodiny osovo súmerné pre niektoré hodnoty n , ale pre ďalšie hodnoty n nebude osová súmernosť platiť. Vysvetlite matematické pravidlá pre uvedenú vlastnosť.

Bonusové zadanie

Veta: Ak $\text{NSD}(a, n) = 1$, potom rovnica

$$ax \equiv 1 \pmod{n}$$

má práve jedno riešenie modulo n .

Vetu dokážete, ak vysvetlíte, prečo na základe zmeny hodnoty x od 0 po $n - 1$ výraz ax nadobúda každú z hodnôt od 0 po $n - 1$ modulo n práve raz.

- Čo vyplýva z vety pre nasledujúci vzťah?

Predpokladajme, že

$$ax_1 \equiv ax_2 \pmod{n}$$

pre dve celé čísla x_1 a x_2 .

- Vysvetlite, čo vyplýva z vety pre rovnosť

$$a(x_1 - x_2) = k \cdot n,$$

kde k je celé číslo.

- Na základe predchádzajúcich vzťahov odvoďte, že n delí rozdiel $x_1 - x_2$.
- Dokážte vetu.

Hlavné zadanie

Ak si zvolíte rôzne hodnoty pre posuvníky a tiež rôzne predpisy, pomocou aplikácie v GeoGebre nakreslíte estetické a zaujímavé obrázky šípových a priamkových hodín.

Pozrite sa na pekné obrázky bližšie.

- Opíšte, aké geometrické vlastnosti a prvky ste objavili: uvažujte o vzájomných polohách priamok a šípok; osovej súmernosti alebo súmernosti na základe otáčania; všimnite si dotyčnice (a ich počet); všimnite si slučky (a ich počet); všimnite si mnohouholníky, ...
- Hľadajte pravidlá. Napríklad: Ak n je násobok čísla tri, potom ...
- Vysvetlite vzory/pravidlá/predpisy, napríklad pomocou vlastností deliteľnosti celých čísel.

Nemusíte riešiť všetky tri vyššie uvedené kroky súčasne. Môžete sa venovať, napríklad, pomenovávaniu pekných obrázkov, ktoré vytvoríte. Alebo opisujte vzory bez podrobného vysvetľovania.

Odporúčame vám začať predpisom $f(x) = ax + b$. Už tento predpis sám vedie k veľkému počtu zaujímavých objavov. Následne môžete hľadať vlastnosti predpisov tvaru $f(x) = ax^2$ alebo $f(x) = ax^3$ alebo si zvoliť komplikovanejšie predpisy a hľadať ich vlastnosti.

Zdroje

Hodiny: <https://www.dobre-napady.sk/pre-skolakov/pracovne-listy/hodiny>

Pracovní list

