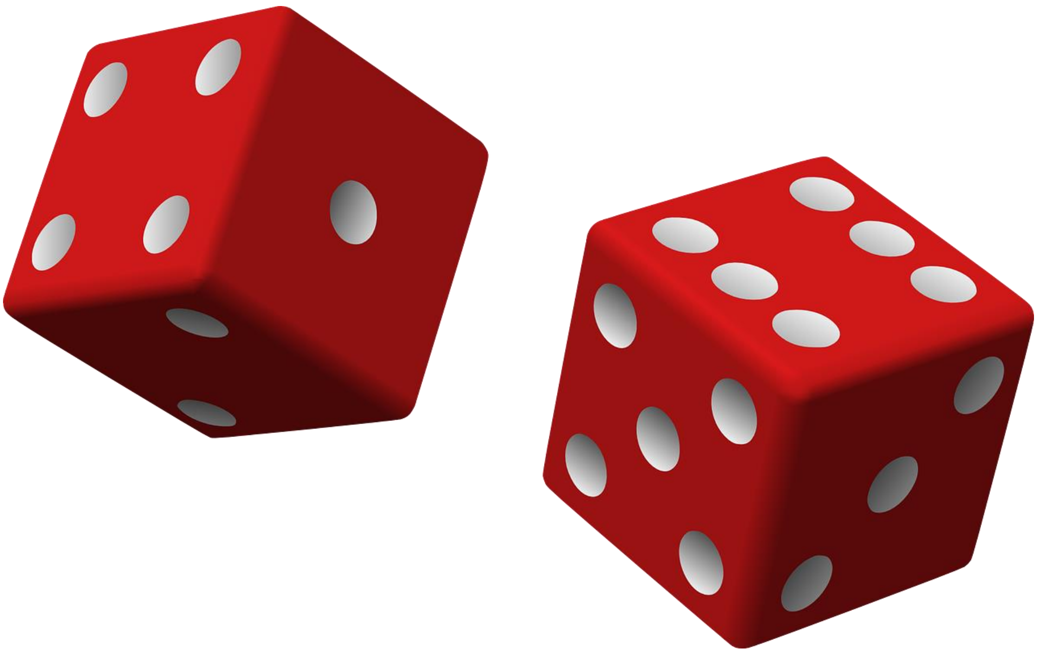
Výborná sada hracích kociek

Matematický B-deň 2016

utorok 29. november 2016, 8:00 – 15:00 hod.



Úvod

Zadanie

Sledovať futbalovú ligu majstrov je zaujímavé do jej samotného konca. Počas súťaže sa totiž môžu vyskytnúť neočakávané výsledky. Napríklad, ak FC Neapol porazí Ajax Amsterdam a Ajax Amsterdam zvíťazí nad Realom Madrid to ešte neznamená, že Real Madrid následne zvíťazí nad FC Neapol, pretože nie je celkom nepredstaviteľné, že aj FC Neapol môže zvíťaziť nad Realom Madrid. Teda do konca futbalovej ligy majstrov nemusí byť jasné, ktorý z futbalových klubov je najlepší. Ale to je futbal... Počas dnešného Matematického B-dňa budete zisťovať, či niečo podobné môže nastať aj pri hre s kockami. Začneme jednoduchou hrou: každý z dvoch hráčov má jednu štandardnú hraciu kocku. Hráči hodia svojou kockou a ten hráč, ktorý hodí najväčší počet bodiek, zvíťazí. Existuje sada hracích kociek, v ktorej sú všetky kocky rovnocenné ale i taká, v ktorej všetky kocky rovnocenné nie sú. Počas riešenia úloh si sadu kociek i vyrobíte.

Priebeh dňa

Zadanie Matematického B-dňa pozostáva zo základných úloh, rozširujúcich úloh a z hlavnej úlohy. Riešeniu hlavnej úlohy odporúčame venovať asi polovicu vyhradeného času.

Čo odovzdáte?

Na záver dňa odovzdáte dokument, v ktorom bude riešenie úloh. V dokumente opíšete riešenia a výsledky jednotlivých úloh a hlavnej úlohy. Riešenia by mali byť vhodne komentované a napísané tak, aby boli zrozumiteľné. Riešenia môžete ilustrovať vlastnými obrázkami. Majte na pamäti, že vaše riešenia musia byť zrozumiteľné osobám, ktoré sa nezúčastnili Matematického B-dňa, ale rozumejú matematike. To znamená, že by ste mali opísať zadanie úlohy, vysvetliť jednotlivé kroky vášho riešenia a tam, kde to bude vhodné a potrebné, odvolať sa na predchádzajúce zistené výsledky a poznatky.
Stručne: odovzdáte vlastný zrozumiteľný príbeh riešenia úloh, ktorý bude podporený matematickými argumentmi. Dbajte na to, aby váš text bol kvalitný!
Určite bude vhodné, ak v úvode vášho dokumentu uvediete riešenia základných úloh a ich riešenia.
Nezabudnite, že celý dokument s riešeniami musíte odovzdať najneskôr o 16:00 popoludní.

Základné úlohy

Úloha 1 (Viac bodiek)

Zuzana a Róbert hrajú hru so štandardnou hracou kockou, ktorá má šesť stien, na ktorých je postupne počet bodiek 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Zuzana a Róbert postupne hádžu každý svojou kockou a ten, kto hodí väčšie číslo, vyhráva. Niekedy vyhrá Róbert, niekedy Zuzana. Ak si zahrajú dostatočne veľký počet hier, bude podiel výhier Zuzany a Róberta približne rovnaký. Zuzane sa to nepáči ...

a) Zuzana dokreslila ešte jednu bodku na tú stenu svojej kocky, kde boli pôvodne dve bodky. Teraz hrá s kockou, ktorá má na stenách počet bodiek: 1, 3, 3, 4, 5 a 6. Ak budú hrať dostatočne veľký počet hier, vyhrá Zuzana častejšie alebo nie?
b) Róbert odhalil, že Zuzana si kocku upravila dokreslením jednej bodky na stenu s dvoma bodkami. Aj on sa rozhodol upraviť si svoju kocku a dokresliť jednu bodku na niektorú zo stien svojej kocky. Ktorá stena, zo stien s bodkami 1, 2, 3, 4, 5 a 6, by bola na dokreslenie jednej bodky najvhodnejšia, aby mal Róbert istotu, že vyhrá čo najčastejšie? Prečo?

Úloha 2 (Znamená viac vždy aj lepšie?)

Róbert bol tiež odhalený a preto prestali hrať. Nato Zuzana prišla s nápadom hrať s tromi rôznymi kockami, ktoré označíme *T, U* a *V*. V tejto hre Zuzana a Róbert nemusia hrať každý s tou istou kockou.

- *T:* 1, 2, 3, 4, 5, 6
- *U*: 2, 3, 4, 5, 6, 7
- *V*: 1, 1, 1, 1, 1, 100

Začnú hrať novú hru, Róbert si ako prvý vyberá kocku, s ktorou bude hrať. Po jeho hode si Zuzana vyberá kocku, ktorou bude hrať.

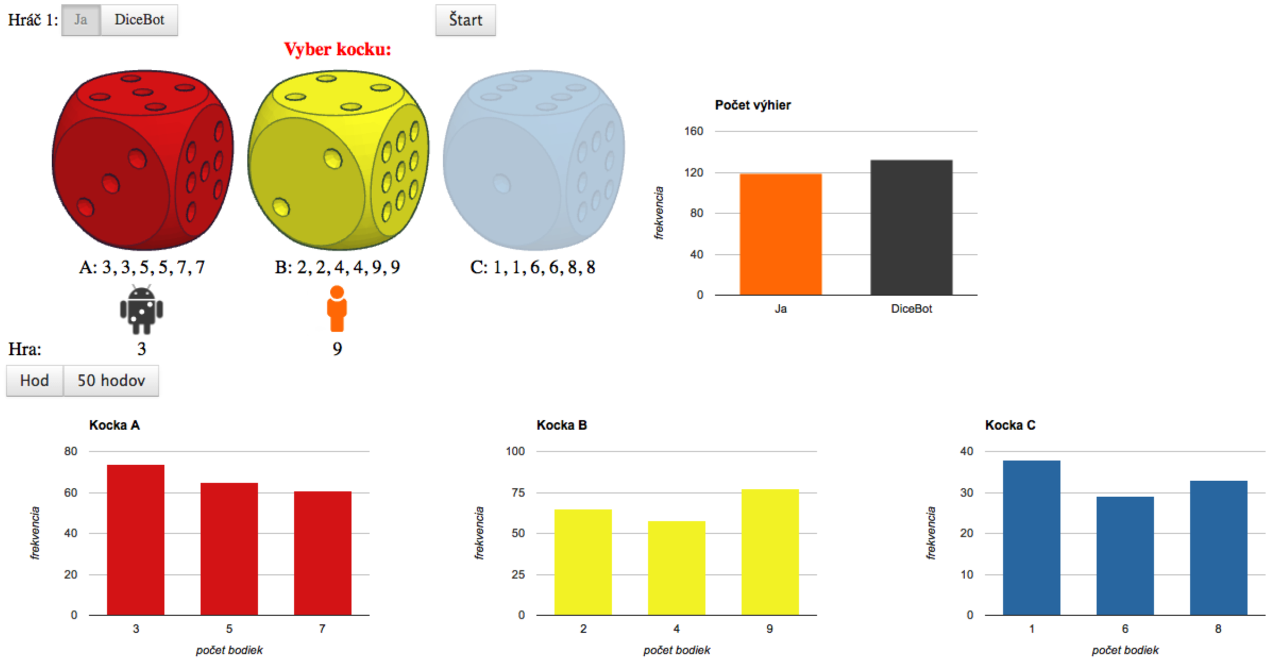
a) Ktorú kocku by si mal vybrať Róbert a prečo?
b) Róbert si vybral kocku *U.* Ktorú kocku by si mala vybrať Zuzana a prečo?

Úloha 3 (Hra so súperom DiceBot)

Nastala tá správna chvíľa, aby ste si i vy zahrali. Hra, ktorú budete hrať, je digitálna. Zahráte si hru, v ktorej si budete vyberať kocku ako prví. Následne si kocku vyberie váš protihráč DiceBot. DiceBot je počítačový program, ktorý túto hru hrá naozaj dobre.

http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/dicebot/

Na výber sú tri hracie kocky. Kocka *A* má šesť stien, ktoré majú na stenách postupne 3, 3, 5, 5, 7 a 7 bodiek (to znamená, že na dvoch stenách sú tri bodky, atď.). DiceBot vám dá prednosť, vy si môžete ako prví v každej hre vyberať kocku, ktorou budete hrať (v hornej časti Hráč 1 je označený „Ja“; ponechajte toto označenie tak, ako je).



Obrázok 1: DiceBot po odohratí veľkého počtu hier. Hráči niekoľkokrát zmenili kocky, s ktorými hrali. (frekvencia = početnosť)

a) Kocku, ktorou chcete hrať, si vyberte kliknutím. Následne si DiceBot vyberie, z kociek, ktoré zostali, kocku, s ktorou bude túto hru hrať. Stlačte tlačidlo „Hod“.

Výsledok celej hry sa zobrazil. Na troch spodných grafoch sú zobrazené (kumulatívne) výsledky jednotlivých hracích kociek. Na grafe vpravo hore sú zobrazené (kumulatívne) výsledky celej hry: ako často ste vyhrali vy (koľkokrát ste hodili vyššie číslo vy) a ako často v hre vyhral DiceBot.

b) Jednu hru s DiceBotom si zahrajte aspoň 300 krát. Občas zmeňte kocku, s ktorou hráte.

Pravdepodobne vás DiceBot porazí. Sledujte graf vpravo hore.

c) Zmeňte teraz označenie Hráč 1 na DiceBot a potvrďte tlačidlom OK. V nasledujúcej hre sa pokúste vyhrať častejšie ako DiceBot.

d) Ak Hráč 1 ste vy, ktorú kocku je najvýhodnejšie si vybrať? Vysvetlite.

Úloha 4 (Pravdepodobnosť výhry)

Ako často kocka A porazí kocku B? Pri riešení tejto úlohy sa naučíte o pravdepodobnosti výhry jednej kocky v porovnaní s inou kockou.
Analyzujte hru s DiceBotom, Do tabuľky 1 zapíšte, kedy kocka A porazí kocku B a naopak. Časť tabuľky je už vyplnená.

Tabuľka 1 Kto vyhrá?

		A					
		3	3	5	5	7	7
B	2	A	A				
	2	A					
	4						
	4					A	
	9						
	9		B				

a) Vyplňte celú tabuľku 1.

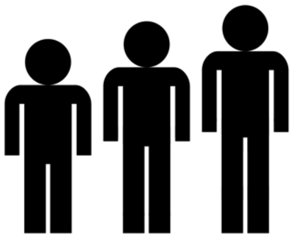
Symbolom $\omega(A,B)$ označme **pravdepodobnosť výhry** kocky A v porovnaní s kockou B.
Pravdepodobnosť výhry $\omega(A,B)$ je rovná $\frac{počet\ hodov,\ v\ ktorých\ kocka\ A\ vyhrala\ nad\ kockou\ B}{počet\ všetkých\ hodov}$.

b) Čomu sa rovná $\omega(A,B)$? Čomu sa rovná $\omega(B,A)$?
c) Pomocou vhodných tabuliek vypočítajte tiež $\omega(B,C)$ a $\omega(C,A)$.

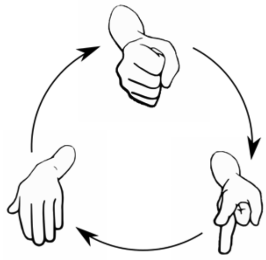
Hovoríme, že kocka A je silnejšia ako kocka B ak platí: $\omega(A,B) > \omega(B,A)$. Zapíšeme: $A \rightarrow B$.

d) Bola v hre s DiceBotom niektorá kocka silnejšia ako zvyšné dve kocky? Zistili ste to, keď ste hrali hru s DiceBotom? Ako?

V hre s DiceBotom je v sade kociek vždy jedna kocka silnejšia oproti niektorej inej kocke a zároveň slabšia ako niektorá iná kocka. Je to evidentné!
Vo **falošnej sade** kociek je jedna kocka vždy vo výhode, pretože je silnejšia ako iná kocka, resp. je najsilnejšia zo všetkých zvyšných kociek. Ale zároveň platí, že každá kocka je slabšia ako aspoň jedna kocka v sade kociek. Túto výhodu by si mal uvedomiť každý, kto hrá ako Hráč 2.



(a) Pri porovnávaní výšky cyklus neexistuje



(b) V hre kameň-papier-nožnice cyklus existuje

Obrázok 2: Čo je to cyklus?

V každej falošnej sade kociek sa dá nájsť aspoň jedna „kružnica“ kociek, to znamená, že kocky sú zoradené tak, že každá nasledujúca je silnejšia ako predchádzajúca kocka (v úlohe 16 budete vyzvaní dokázať toto tvrdenie). Ak by kružnica obsahovala tri kocky, napríklad A, B a C; tak by pre ne platilo: $C \rightarrow A$, $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$. Takúto kružnicu troch (alebo viacerých) kociek budeme nazývať **cyklus.**

Určite poznáte hru **kameň-papier-nožnice**, v ktorej sa tiež dá jednoznačne určiť cyklus, pretože každý prvok hry kameň, papier a nožnice má silnejší (a tiež slabší) prvok, nad ktorým vyhráva alebo s ktorým prehrá. Spolu, všetky tri prvky kameň-papier-nožnice, tvoria cyklus.

Pravdepodobne ste si už uvedomili, že ak si hru s falošnou sadou kociek zahráte so svojimi spolužiakmi, môžete si z nich pomerne jednoducho urobiť „dobrý deň“ a ľahko ich obrať o celé vreckové. Musíte mať pri tom, samozrejme, trochu šťastia, aby vás neodhalili, že používate nekorektnú, falošnú, sadu kociek.

Úloha 5 (Ďalšia falošná sada kociek)

Majme ďalšiu falošnú sadu kociek. Uvažujme o kockách:
D: 1, 1, 7, 7, 8, 8
E: 2, 2, 3, 3, 9, 9
F: 4, 4, 5, 5, 6, 6

a) Vypočítajte pravdepodobnosti výhry a dokážte, že táto sada kociek je falošná.

Zuzana a Róbert si znovu zahrajú hru s touto sadou kociek.

Róbert si vyberá prvý, svoj výber si starostlivo premyslel. Vyberá si kocku D. Prečo?

Úloha 6 (Tabuľky a diagramy o kockách)

Majme dve kocky. K: 1,1, 3, 5, 5, 6 a L: 2, 2, 2, 4, 5, 6. Ak si s týmito kockami chceme zahrať hru, môžeme si najskôr vyhodnotiť ich silu. V hre s kockami K a L môže nastať aj remíza. Remízu v tabuľke označíme písmenom G. Pozrite si vyplnenú tabuľku 2.

Tabuľka 2: Kocky K a L: kto je víťaz?

L \ **K**	1	1	3	5	5	6
2	L	L	K	K	K	K
2	L	L	K	K	K	K
2	L	L	K	K	K	K
4	L	L	L	K	K	K
5	L	L	L	G	G	K
6	L	L	L	L	L	G

Je zrejmé, že $\omega(K,L) + \omega(L,K) < 1$.

a) Majme dve kocky s nasledujúcou vlastnosťou: ak sa na niektorej stene na kocke A nachádza určitý počet bodiek, tento istý počet bodiek sa potom nemôže nachádzať na žiadnej stene na kocke B. Vysvetlite, že potom $\omega(A,B) + \omega(B,A) = 1$.

Vytvoriť tabuľku pre situáciu v a) by asi trvalo veľmi dlho. Ak chcete, nahrajte si z nasledujúceho linku súbor v Exceli. Pomocou súboru v Exceli môžete pomerne jednoducho porovnať dve hracie kocky, keď každá z nich má šesť stien. Súbor v Exceli si môžete upraviť tak, že budete porovnávať viac kociek alebo kocky s inými počtami bodiek na stenách.

http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/dice/table.xlsx

Pridajme ku kockám K a L kocku M: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

b) Využitím tabuľky v v Exceli dokážte, že sada K, L, M nie je falošná.

Úloha 7 (Sada so štyrmi kockami)

Zuzane sa hry s kockami páčia a vymyslela sadu so štyrmi kockami. Róbert má právo prvý vybrať si kocku, s ktorou bude hrať.

- W: 1, 1, 1, 5, 5, 5
- X: 2, 2, 2, 2, 6, 6
- Y: 0, 0, 4, 4, 4, 4
- Z: 3, 3, 3, 3, 3, 3

a) Čomu sa rovná súčet bodiek na všetkých stenách na každej kocke? Myslíte si, že súčet bodiek na stenách kocky môže spôsobiť, že kocka je silnejšia ako ostatné?
b) Je sada kociek $W\ X\ Y\ Z$ falošná?

Cyklus bude dlhší, ak je počet kociek väčší. V cykle štyroch kociek platí, že 1 je silnejšia ako 2, 2 je silnejšia ako 3, 3 je silnejšia ako 4 a 4 je silnejšia ako 1.

c) Dokážete nájsť cyklus týchto štyroch kociek?
d) Koľko cyklov troch kociek sa nachádza v sade štyroch kociek?

Úloha 8 (Porovnanie falošných sád kociek)

Zuzana a Róbert hrajú znova hru s kockami. Róbert sa z predchádzajúcich hier poučil: Zuzana si musí vyberať kocku prvá. Obaja si prepočítali všetky pravdepodobnosti výhry. Zuzana má rozhodnúť, s ktorou sadou kociek budú hrať: ABC (úloha 4), DEF (úloha 5) alebo $WXZY$ (úloha 7).

a) Ktorá sada je najvýhodnejšia pre Zuzanu?

Čo ak nastane situácia, že si sadu hracích kociek vyberá Róbert (a Zuzana si musí vybrať si kocku prvá).

b) Ktorú sadu by si mal vybrať Róbert?

Úloha 9 (Mnohostenné kocky)

Po tom, ako Róbert prehral so Zuzanou veľa hier, pokúša sa vymyslieť niečo iné. Rozhodol sa, že nie všetky kocky, s ktorými budú hrať, budú mať tvar geometrického telesa, teda tvar kocky so šiestimi stenami. Existujú totiž hracie nástroje, nazývajú sa tiež kocky, ale majú štyri, osem, dvanásť alebo dvadsať stien (obrázok 3). A ak by Róbert pridal teleso v tvare dvojitého ihlana (dvojitej pyramídy), dokáže dokonca vyrobiť hraciu kocku, ktorá má sedem alebo trinásť stien!

Obrázok 3: Mnohostenné kocky

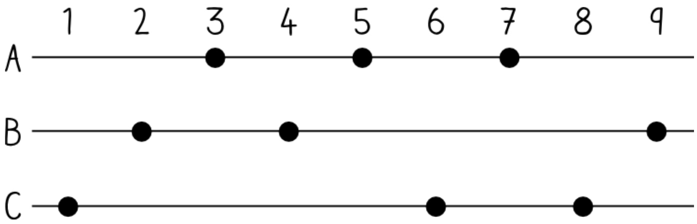
Róbert má v úmysle Zuzanu domýliť. Navrhol nasledujúcu sadu hracích kociek:

- *Q*: 3, 3, 6
- *R*: 2, 2, 5, 5
- *S*: 1, 4, 4, 4, 4

Je táto sada hracích kociek falošná?

Úloha 10 (Presun na bodkový diagram)

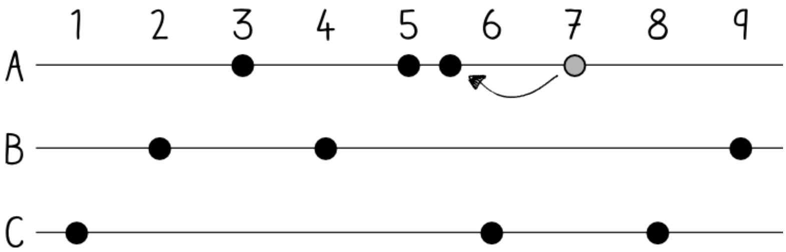
Do tejto chvíle ste analyzovali už vytvorené sady hracích kociek. Ale ako vyrobiť falošnú sadu hracích kociek? V tejto úlohe opíšeme, ako by to bolo možné.
Pozrime sa trochu inak na sadu kociek, s ktorými sme hrali s DiceBotom , teda na kocky:
A: 3, 3, 5, 5, 7, 7; B: 2, 2, 4, 4, 9, 9; C: 1, 1, 6, 6, 8, 8. Na zobrazenie počtu bodiek na kockách použijeme **bodkový diagram**.
Keďže na každej kocke je počet bodiek na dvoch stenách rovnaký, zjednodušíme si situáciu a kocky budeme reprezentovať ako hracie kocky s tromi stenami: A: 3, 5, 7; B: 2, 4, 9; C: 1, 6, 8; čím sa pravdepodobnosti výhry nezmenia.



Obrázok 4: Diagram 1

a) Vysvetlite, ako sa dá, na základe bodkového diagramu, vypočítať hodnota $\omega(A,B)$ a hodnota $\omega(B,A)$ (cvičenie 4b).

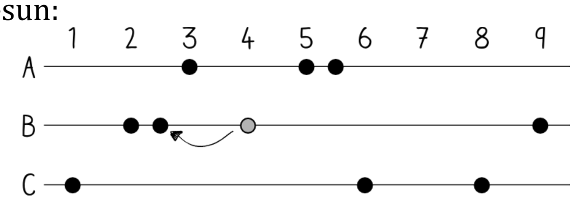
Bodkový diagram môžeme považovať za štartovací bod. Ak budeme bodky v diagrame posúvať, môžeme sa pokúsiť zvýšiť pravdepodobnosť výhry. Napríklad, v diagrame pre hraciu kocku *A* presunieme bodku 7 doľava.



Obrázok 5: Diagram 2

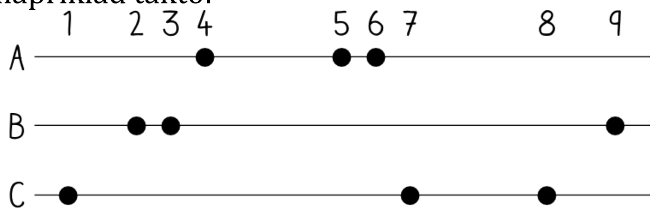
b) Čomu sa rovná $\omega(A,B)$, $\omega(B,C)$ a $\omega(C,A)$?

Môžeme urobiť aj iný presun:



Obrázok 6: Diagram 3

Ak vás rozčuľuje, že dve alebo päť bodiek sa teraz nachádza v diagrame dvakrát, môžete presunúť všetky čísla, napríklad takto:

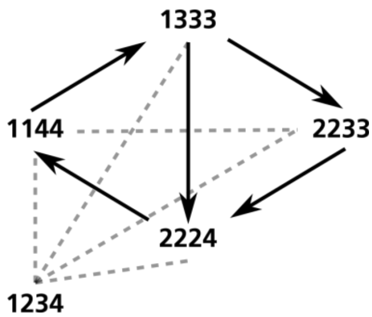


Obrázok 7: Diagram 4

Určite ste si všimli, že na poslednom diagrame 4 (obrázok 7) sú hracie kocky z úlohy 5.

Pozrime sa teraz na sadu piatich hracích kociek, z ktorých každá má štyri steny. Súčet bodiek na stenách týchto hracích kociek je 10. Na kockách sú iba nasledovné počty bodiek: 1, 2, 3 alebo 4. Uvedené podmienky umožňujú vytvoriť päť hracích kociek. Pre zjednodušenie nebudeme kocky označovať písmenom, ale počet bodiek na jednotlivých stenách zapíšeme ako postupnosť čísel bez čiarky (ako štvorciferné číslo s ciferným súčtom desať): 1234, 1333, 2233, 2224 a 1144. Je takáto sada hracích kociek falošná sada?

Silu každej hracej kocky, vzhľadom k ostatným hracím kockám môžeme znázorniť nasledovne:



Obrázok 8: Orientovaný graf sady kociek

Napíšeme označenie každej hracej kocky, ako vrchol päťuholníka (obrázok 8) a nakreslíme šípku smerujúcu od kocky A ku kocke B ak $A \rightarrow B$ (pripomíname: šípkou označujeme, že kocka A je silnejšia ako kocka B, čiže $\omega(A,B) > \omega(B,A)$). Ak $\omega(A,B) = \omega(B,A)$ nakreslíme medzi označenia kociek A a B čiarkovanú čiaru. Opísaný spôsob znázornenia vzťahov sa nazýva **graf.** V grafe, ktorý reprezentuje falošnú sadu kociek, existuje aspoň jedna šípka smerujúca *ku* a aspoň jedna šípka smerujúca *od* každej hracej kocky.

Odhaliť cykly v grafe je jednoduché: na obrázku 8 existuje jeden cyklus pre tri kocky a jeden cyklus pre štyri kocky!

Kocka 1234 je **neutrálna** kocka, neexistuje šípka k nej ani šípka smerujúca od nej. To tiež znamená, že sada kociek nie je falošná. Ak by sme zo sady vylúčili neutrálnu hraciu kocku, dostali by sme falošnú sadu hracích kociek.

Úloha 11 (Graf sady hracích kociek)

Nakreslite graf sady hracích kociek z úlohy 7.

Úloha 12 (Hráme s algebrickou kockou)

Hracie kocky:

- G: 1, 4, 4
- H: 3, 3, 3
- I: 2, 2, 5

sú kocky falošnej sady. Jednotlivé pravdepodobnosti výhry sú: $\omega(G,H) = \frac{2}{3}, \omega(H,I) = \frac{2}{3}$ a $\omega(I,G) = \frac{5}{9}$. Róbert si zaumienil zmeniť sadu hracích kociek tak, že najmenšia pravdepodobnosť výhry ($\frac{5}{9}$) sa zmení tak, že bude vyššia! Dosiahne to zmenou počtu všetkých stien kociek tak, aby každá kocka mala 21 stien. Kocka G bude mať na svojich stenách n jednotiek a 21-n štvoriek: G: 1, 1, ..., 1, 4, 4. ..., 4. Kocka H má 21 trojok: H: 3, 3, ... , 3. Kocka I má n pätiek a 21 – n dvojok. Napríklad, ak n = 3, tak G: 1, 1, 1, 4, 4, ...,4; H: 3, 3, 3, ... , 3 a I: 2, 2, 2, ... , 2, 5, 5, 5.

a) Vyjadrite pravdepodobnosť výhry $\omega(G,H), \omega(H,I)\ a\ \omega(I,G)$ pre n.

Dve z troch pravdepodobností výhry sú rovnaké.

b) Akú hodnotu n by mal Róbert zvoliť, ak chce dosiahnuť, aby najnižšia pravdepodobnosť výhry pre $\omega(G,H), \omega(H,I)\ a\ \omega(I,G)$ bola najvyššia možná?
c) Čo sa stane, ak hracia kocka bude mať 30 stien?

Rozširujúce úlohy

Riešiť nasledujúce rozširujúce úlohy nie je povinné ani nevyhnutné k tomu, aby ste dokázali vyriešiť hlavné zadanie. Rozširujúce úlohy vám môžu pomôcť zovšeobecniť myšlienky a prehĺbiť poznatky o falošných sadách hracích kociek. Rozširujúce úlohy riešte iba vtedy, ak máte na ich riešenie v priebehu dopoludnia dostatok času.

Úloha 13 (Rozširujúca zručnosť: špeciálny graf)

Nech máme k dispozícií sadu hracích kociek so šiestimi stenami: 222777, 116666, 055555, 444449, 333388. Uvedená sada hracích kociek má niekoľko špeciálnych vlastností:

a) Zostrojte graf uvedenej sady piatich hracích kociek.
b) Urobte prehľad o všetkých cykloch v grafe.

Úloha 14 (Neutrálna hracia kocka)

Budeme uvažovať hraciu kocku so šiestimi stenami, ktorej súčet bodiek na stenách je 21 a počet bodiek na jednej stene môže byť iba 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6. Príklad štandardnej hracej kocky je kocka *O:* 1, 2, 3, 4, 5, 6.

a) Vytvorte niekoľko hracích kociek A, ktorých súčet bodiek na stenách je 21 a pre každú z nich vypočítajte $\omega(A, O)$ a $\omega(O, A)$.

Tak, ako hracia kocka 1234, so súčtom bodiek 10, bola neutrálnou kockou pre všetky kocky so štyrmi stenami, tak hracia kocka O bude neutrálnou kockou pre všetky kocky so šiestimi stenami a súčtom bodiek na stenách 21.

b) Dokážte, že pre každú kocku, ktorá má súčet bodiek na všetkých stenách rovný 21 platí: $\omega(A, O) = \omega(O, A)$.

Ak súčet bodiek na všetkých stenách kocky nie je nutne 21, ale na stenách sú stále iba počty bodiek 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6; môžeme vysloviť všeobecnejšie tvrdenie.

c) Dokážte, že $\omega(a, O) = \frac{súčet\ bodiek\ (A) - 6}{36}$ a $\omega(0, A) = \frac{36 - súčet\ bodiek\ (A)}{36}$.

d) V súvislosti s vyššie uvedenými tvrdeniami dokážte všeobecnejšie tvrdenie pre hracie kocky s bodkami na stenách 1, 2, 3, ..., n-1, n; kde n je celé kladné číslo.

Úloha 15 (Duálna kocka)

Uvažujme o hracej kocke s piatimi stenami, ktorej súčet bodiek na stenách sa rovná 15 a na každej stene môže byť iba počet bodiek 1, 2, 3, 4 alebo 5; napríklad hracia kocka 12255.

a) Vypíšte všetky také kocky.

Ku každej takejto hracej kocke A existuje duálna kocka A^*. Pre duálnu kocku A^* platí, že počet bodiek na jej stenách sa rovná 6 mínus súčet bodiek na stenách kocky A. Napríklad, duálna kocka ku kocke 12255 je kocka 6 – 5, 6 – 5, 6 – 2, 6 – 2, 6 – 1; teda kocka 11445.

b) Vysvetlite, prečo je súčet bodiek na stenách kocky A^*, ktorá je duálnou kockou ku kocke A, tiež rovný 15.
c) Dokážte, že $\omega(A,B) = \omega(B^*,A^*)$.

Hracia kocka je **samoduálna**, ak platí, že $A = A^*$.

d) Dokážte, že pre samoduálne kocky A a B platí: $\omega(A,B) = \omega(B,A)$.
e) Nech hracia kocka A je samoduálna. Dokážte:
ak $\omega(B,A) > \omega(A,B)$, potom $\omega(B^*,A) < \omega(A,B^*)$.

Úloha 16 (Cykly)

Dokážte, že každá falošná sada hracích kociek obsahuje cyklus.

Úloha 17 (Horné ohraničenie súčtu pravdepodobností)

Majme sadu hracích kociek A, B a C s cyklom $A \to B, B \to C, C \to A$, počítajme pravdepodobnosti výhry $\omega(A,B), \omega(B,C)$ a $\omega(C,A)$. Je zrejmé, že všetky uvedené pravdepodobnosti výhry sú ≤ 1. Môže byť každá z nich rovná jednej? Alebo existuje nejaká horná hranica? V tejto úlohe sa pokúsite dokázať, že

$$\omega(A,B) + \omega(B,C) + \omega(C,A) \leq 2.$$

Ak chcete vypočítať pravdepodobnosti výhier, porovnávate počty bodiek na stenách kociek pomocou tabuliek. Predpokladajme, že každá hracia kocka má šesť stien. Steny kocky A označíme postupne $A_1, A_2, A_3, \dots, A_6$. Napríklad v úlohe 4 platí: $A_1 = 3,\ A_2 = 3,\ A_3 = 5,\ A_4 = 5,\ A_6 = 7$. Podobne použijeme označenie stien pre kocky B a C; napríklad $B_5 = 9$.

Zapíšeme: $A_1B_2 = 1$ ak počet bodiek na stene 1 kocky A je väčší ako počet bodiek na stene 2 kocky B (platí tiež $A_1 > B_2$), a $A_1B_2 = 0$, ak uvedená nerovnosť neplatí (t.j. ak platí: $A_1 \leq B_2$). Podobne, pre $1 \leq i, j \leq 6$

$$A_iB_j = 1$$

ak $A_i > B_j$, inak $A_iB_j = 0$.

a) Vysvetlite, prečo A_1B_1, B_1C_1 a C_1A_1 nemôžu všetky byť rovné jednej.
b) Všeobecnejšie: vysvetlite, prečo A_iB_j, B_jC_k a C_kA_i nemôžu byť všetky rovné jednej (pre $1 \leq i, j, k \leq 6$).
c) Vysvetlite rovnosť

$$\omega(A,B) = \frac{A_1B_1 + A_1B_2 + \dots + A_6B_5 + A_6B_6}{36}$$

d) Vysvetlite, prečo súčet 216 × 3 výrazov

$$\begin{aligned}
&A_1B_1 \;+\; B_1C_1 + C_1A_1 + \\
&+ A_1B_1 \;+\; B_1C_2 + C_2A_1 \;+ \\
&+ A_1B_1 \;+\; B_1C_3 + C_3A_1 \;+ \\
&+ \;\ldots \\
&+ A_6B_6 \;+\; B_6C_5 + C_5A_6 \;+ \\
&+\; A_6B_6 \;+\; B_6C_6 + C_6A_6
\end{aligned}$$

je rovný

$$216(\omega(A,B) \;+\; \omega(B,C) \;+\; \omega(C,A)).$$

e) Vysvetlite, prečo z častí (b), (c) a (d) vyplýva

$$\omega(A,B) \;+\; \omega(B,C) \;+\; \omega(C,A) \;\leq\; 2.$$

f) Sformulujte všeobecné tvrdenie pre všeobecný počet kociek s ľubovoľným počtom stien.

Hlavné zadanie – falošné sady hracích kociek

Hlavným zadaním Matematického B-dňa 2016 je vytvoriť sadu hracích kociek, ktorá je falošná. Určíme tri vlastnosti sady kociek, ktorú máte vytvoriť. Vlastnosti 1 a 2 sú dôležitejšie ako vlastnosť 3. Vytvorte falošnú sadu hracích kociek, ktorá bude mať čo najviac z požadovaných vlastností.

Vlastnosti:

1. Uistite sa, že pravdepodobnosť, že vyhrá hráč 2 je najvyššia možná. Predpokladajte, že hráč 1 si vypočítal pravdepodobnosti výhry a hrá veľmi dobre.

2. Uistite sa, že sada hracích kociek má veľký cyklus.

3. Uistite sa, že sada hracích kociek má niekoľko cyklov.

Vysvetlenie k vlastnosti 1: Chcete vytvoriť sadu hracích kociek pre hráča 1 (ktorý si vyberá prvý kocku, s ktorou bude hrať), hrá veľmi dobre (vyberá si kocku, ktorej pravdepodobnosť výhry pre hráča 2 je najnižšia). Preto by mala byť najnižšia pravdepodobnosť výhry najvyššia možná.