Matematický B-deň 2014

pondelok 1. december, 9:00 – 16:00 hod.

Zhasnuté svetlá

Na rozcvičenie: zahrajte si hru!

Zadanie úloh je založené na pravidlách hry “Zhasnuté svetlá" (‘Lights Out'), ktorá sa od roku 1995 hrá na celom svete. Hrací plán hry pozostáva z 25 svetiel, ktoré sú umiestnené v piatich riadkoch a piatich stĺpcoch. Na začiatku hry niektoré svetlá svietia. Cieľom hry je, ako hovorí aj jej názov, všetky svetlá zhasnúť. Na svetlá môžete kliknúť (fungujú ako prepínač daného svetla). Ak na svetlo (políčko) kliknete, prepne sa do opačného stavu: ak bolo zhasnuté, zasvieti, ak svietilo, zhasne. Navyše, platí dôležité pravidlo hry: spolu so zmenou stavu svetla, na ktoré kliknete, zmení sa aj stav svetiel, ktoré s daným svetlom susedia vľavo, vpravo, nad a pod daným svetlom.

Dnes odhalíte, koľko matematických záhad sa v hre “Zhasnuté svetlá” skrýva! Budete mať tiež možnosť zahrať si rôzne varianty hry na rôznych hracích plánoch.

Zahrajte si, na rozohriatie a rozcvičenie, niekoľko pripravených hier “Zhasnuté svetlá”. Otvorte si link http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/LightsoutSK/Lightsout.html a zahrajte si hru pomocou apletu. Váš učiteľ (organizátor súťaže) vám môže poskytnúť i offline verziu apletu (iba pre Windows).

Záhada 1 (*jednoduchá*)
Vytvorte si v aplete hraciu plochu 5×5. V časti ”Vytvoriť konfiguráciu” použite možnosť “individuálne nastavenie svetiel” a nastavte svetlá (konfiguráciu) podľa obrázka 1. Vypnite možnosť “individuálne nastavenie svetiel” a v časti “Hrať hru” aktivujte možnosť “okamžité prepnutie po kliknutí”. Vyriešte problém (t.j. zhasnite všetky svetlá). Nula (0) znamená, že svetlo je zhasnuté (nesvieti), jednotka (1) znamená, že svetlo je zapnuté (svieti). Záhada 1 sa dá vyriešiť piatimi kliknutiami.

1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Obr. 1

Záhada 2 (*stredne náročná*)
Riešte konfiguráciu svetiel na obrázku 2 (riešenie si vyžaduje šesť kliknutí).

1	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	1	0	1

Obr. 2

Záhada 3 (*náročná*)
Je veľmi ťažké nájsť riešenie záhady na obrázku 3? Žiaden problém!

Po mnohých pokusoch vyriešiť záhadu 3 si môžete myslieť: *je to nemožné!*

Ale mýlite sa. Záhadu 3 je možné vyriešiť. Môžeme vám však prezradiť, že iba 25% z 33 554 432 možných počiatočných konfigurácií je riešiteľných. Riešiteľnosť znamená, že existuje také riešenie, aby boli všetky svetlá zhasnuté. Neriešiteľnosť znamená, že je nemožné zhasnúť všetky svetlá z danej počiatočnej konfigurácie svetiel.

V priebehu dnešného dňa sa naučíte techniky, ktoré vám pomôžu rozhodnúť, *či* je daná konfigurácia svetiel riešiteľná alebo nie a ak je riešiteľná, *ako* nájsť riešenie.

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Obr. 3

Praktické rady

Štruktúra zadania a rozvrh dnešného dňa

V PRVEJ ČASTI sa oboznámite s hrou "Zhasnuté svetlá" a všeličo si vyskúšate. Prvou časťou zadania sa zaoberajte dopoludnia. V prvej časti nájdete niekoľko zadaní. Pri ich riešení si bude vhodné kresliť alebo popisovať situácie. Objavovania (zadania) v prvej časti sú očíslované. V riešení ďalších problémov (v DRUHEJ ČASTI) sa budete môcť na svoje predchádzajúce riešenia odvolať, napríklad takto: "V objavovaní 13 sme zistili, že … . Uvedené zistenie teraz využijeme."

Problémy, ktoré budete riešiť objavovaním **[Objavovanie]** sú určené na predstavenie nových poznatkov o problematike. Výsledky objavovania nepíšte do vašej záverečnej správy. Vo vašej záverečnej správe je nutné opísať a zdôvodniť riešenia problémov, ktoré sú nazvané **[Zadanie]**.

Varovanie! *Posledná časť (E) PRVEJ ČASTI je teoretická a dosť náročná. Riešte ju iba dopoludnia a iba ak budete mať dopoludnia dostatok času. Táto časť je špeciálne určená k riešeniu Hlavnej otázky D v DRUHEJ ČASTI.*

V DRUHEJ ČASTI (vlastné skúmanie) budete riešiť otvorené a komplexné problémy. Úlohy v DRUHEJ ČASTI riešte popoludní. Pri riešení využite všetko, čo ste sa naučili riešením úloh v PRVEJ ČASTI. Môžete vyriešiť jedno alebo viac Hlavných zadaní A,B a C. Navyše, ak chcete, môžete riešiť i Hlavné zadanie D. Upozorňujeme vás, že podrobné a detailne vyriešenie dvoch Hlavných zadaní bude ohodnotené lepšie, ako povrchné a neúplné riešenia troch alebo štyroch Hlavných zadaní z DRUHEJ ČASTI. Výsledky riešenia Hlavných zadaní napíšte do vašej záverečnej správy.

Čo od vás očakávame?

Vo vašej *záverečnej správe* opíšete výsledky a riešenia úloh s názvom *zadanie* z PRVEJ ČASTI a riešenia a výsledky *Hlavných zadaní* z DRUHEJ ČASTI.
Vyjadrujte sa jasne a presvedčivo. Samozrejme, že do riešení môžete vložiť, na vysvetlenie, aj vlastné obrázky. Riešeniam vo vašej záverečnej správe by mal rozumieť každý čitateľ, teda aj ten, kto nepozná zadanie úloh Matematický B-deň, ale má dostatočné matematické vedomosti. Znamená to, že problémy a ich riešenia musíte opísať zrozumiteľne a tam, kde to bude nutné, uvediete poznatky a argumenty získané na základe objavovania v PRVEJ ČASTI. Stručne: napíšte zrozumiteľnú správu podporenú matematickými argumentmi. Kvalita vašej záverečnej správy hrá dôležitú úlohu pri jej hodnotení!

Výsledky vašich riešení, ktoré vyriešite dopoludnia, si uchovajte v elektronickej podobe. Bude potom jednoduchšie použiť ich do záverečnej správy. Prácu si naplánujte tak, aby ste záverečnú prácu odovzdali najneskôr o 16:00 hodine popoludní.

Informácia o internete

O hre "Zhasnuté svetlá" (Lights Out) a stratégiách jej riešenia môžete nájsť na internete veľa informácií. Ale neodporúčame vám sa týmito informáciami zaoberať, môžu vás pri riešení úloh, problémov a zadaní dnešnej súťaže Matematický B-deň pomýliť a popliesť.

Veľa šťastia a predovšetkým: príjemnú zábavu s matematickými úlohami!

PRVÁ ČASŤ

Pozíciu svetla v hracom pláne (mriežke) budeme označovať pomocou dvojice (*riadok, stĺpec*). Kliknutie na svetlo na pozícií (*i, j*) zapíšeme ako $K_{i,j}$. Ak v hracom pláne je iba jeden riadok a klikneme na svetlo v stĺpci *j*, zapíšeme pozíciu K_j. **Postupnosť kliknutí** znamená viacnásobné kliknutie, napríklad $K_{1,3}$ $K_{4,2}$ $K_{3,3}$. **Nulová konfigurácia** je konfigurácia, v ktorej sú všetky svetlá zhasnuté (na všetkých políčkach hracieho plánu je nula, 0).

A: Postupnosť kliknutí

1. [Objavovanie]

Pomocou apletu vytvorte na mriežke 4×7 konfiguráciu na obrázku 4 (použite príkazy "Vytvoriť mriežku' a "Vytvoriť konfiguráciu"):

1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0

Obr. 4

Podčiarknuté čísla na obrázku 5 znamenajú, na ktoré svetlá bude kliknuté (konfiguráciu si môžete vytvoriť pomocou apletu príkazom "vytvoriť plán"):

1	1	0	$\underline{0}$	$\underline{1}$	1	0
0	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	$\underline{1}$	1	0
0	$\underline{1}$	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0

Obr. 5

Predtým, ako kliknete na príkaz "realizovať plán" uvedomte si, že stav svetla (2,3) sa nezmení (neprepne), ale stav svetla (1,5) sa zmení (prepne).

a) Vysvetlite, ako zmena stavu svetla (prepnutie) súvisí s počtom susedných svetiel, na ktoré klikneme.

b) V mriežke 1×99 všetky svetlá svietia. Uskutočníme nasledujúcu postupnosť kliknutí: K_1 K_2 K_{50} K_{92} K_{94}. Ktoré svetlá budú potom zhasnuté?

2. [Objavovanie]

V mriežke 1×6 vytvorte náhodnú počiatočnú konfiguráciu svetiel a zapíšte si ju.

a) Uskutočnite postupnosť kliknutí K_1 K_3 K_4 K_5 K_3 K_5 a výslednú konfiguráciu si zapíšte.

b) Vráťte sa k pôvodnej počiatočnej konfigurácii a uskutočnite postupnosť kliknutí K_1 K_4. Zapíšte si výslednú konfiguráciu.

c) Výsledné konfigurácie v prípadoch **a)** aj **b)** sú rovnaké. Vysvetlite.

3. [Objavovanie]

Vytvorte ľubovoľnú konfiguráciu na ľubovoľnej mriežke a počiatočnú konfiguráciu si zapíšte. Uskutočnite postupne tri kliknutia; nazvime ich *A, B* a *C*. Presvedčte sa, že *A B C* má ten istý efekt ako *B A C* a tiež ako *C A B*. Vysvetlite.

Závery

- Z postupnosti kliknutí môžeme vynechať dvojité kliknutia. Kliknutie má význam iba vtedy, ak sa uskutoční nepárny počet krát.
- Poradie kliknutí v postupnosti kliknutí nie je podstatné, môže byť ľubovoľné.

Závery majú významné dôsledky, ktoré budeme využívať.

Dôsledok 1: Vždy je možné vrátiť sa.

4. [Objavovanie]

Ak uskutočníte tú istú postupnosť kliknutí dvakrát, každé kliknutie sa vykoná (bude pôsobiť) dvakrát. Jedným slovom: čo sa stane?

5. [Objavovanie]

Ak pre určitú počiatočnú konfiguráciu nájdete postupnosť kliknutí, ktorá vyústi do nulovej konfigurácie a vy znovu zopakujete tú istú postupnosť kliknutí, aká bude potom výsledná konfigurácia?

Dôsledok 2: Riešiteľné konfigurácie sú presne také, ktoré sa dajú získať z počiatočnej nulovej konfigurácie.

6. [Objavovanie]

Vysvetlite, prečo dôsledok dva vždy platí.

7. [Objavovanie]

a) Vytvorte v aplete mriežku 3×4. Kliknite na príkaz "všetky svetlá svietia". Kliknite na príkaz "vytvoriť plán" a označte (podčiarknite) všetky svetlá po obvode mriežky, vrátane svetiel v rohoch. *Zatiaľ neklikajte* na príkaz "realizovať plán". Predpovedajte a zapíšte si, čo sa stane, ak uskutočníte označenú postupnosť kliknutí.

b) Kliknite na príkaz "realizovať plán". Dostali ste taký istý výsledok, ako ste predpovedali?

c) Čo sa stane, ak kliknete na všetky svetlá po obvode mriežky znova?

d) Skúmajte, podobnú situáciu na mriežke n×n, ak označíte postupnosť kliknutí na svetlá na pozíciách ((1, 1), (2, 2), (3, 3) vrátane (n, n)).

e) Vypnite všetky svetlá pomocou príkazu "všetky svetlá zhasnuté". Teraz kliknite na každé svetlo práve raz. Predpovedajte výsledok pre mriežku m×n špeciálne pre niektoré vybrané hodnoty m a n.

8. [Zadanie A]

Skúmajme mriežku 1×n (pre n = 1, 2, 3, 4, …), v počiatočnej konfigurácii všetky svetlá svietia.
Tvrdenie: Pre každú hodnotu n existuje postupnosť kliknutí, ktorá vedie k nulovej konfigurácii.

a) Ukážte, že tvrdenie je pravdivé pre každé n.

b) Pre každú hodnotu n existuje najkratšia postupnosť kliknutí, ktorá vedie k nulovej konfigurácii. Odhaľte vzťah medzi dĺžkou postupnosti kliknutí (počet kliknutí v postupnosti a hodnotou n.

B: Nuly a jednotky a prepínacie diagramy

Kliknutie na svetlo zmení stav svetla a tiež stav svetiel, ktoré s daným svetlom susedia. Inými slovami: V mriežke sa zmení konfigurácia. Na obrázku 6 vidíme ukážku v mriežke 4x5. Výsledok po kliknutí na svetlo na pozícii $K_{3,3}$ môžeme vyjadriť nasledovne:

Počiatočná konfigurácia

1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1

+

klik $K_{3,3}$

0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

=

Výsledná konfigurácia

1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1

Obr. 6

Číslo jedna v mriežkach počiatočnej a výslednej konfigurácie označuje svetlá, ktoré svietia. Mriežka s názvom klik $K_{3,3}$ predstavuje inú situáciu: presne týchto päť svetiel sa zmení, keď klikneme na svetlo na pozícií $K_{3,3}$ (zo "svieti na "zhasnuté" alebo naopak). Nuly v tejto mriežke reprezentujú svetlá, ktorých stav sa kliknutím nezmení.

Mriežku s názvom "klik $K_{3,3}$" na obrázku 6 nazveme ***prepínací diagram*** pre $K_{3,3}$.

Operácie "+" a "=" na obrázku 6 znamenajú, že stavy svetiel vo výslednej konfigurácií môžeme "vypočítat". V každej bunke mriežky môžeme uplatniť práve jedno "pravidlo výpočtu":

0 + 0 = 0 svetlo je zhasnuté a nie je prepínané, zostane zhasnuté,
1 + 0 = 1 svetlo svieti a nie je prepínané, zostane svietiť,
0 + 1 = 1 svetlo je zhasnuté a je prepínané, bude svietiť,
1 + 1 = 0 svetlo svieti a je prepínané, bude zhasnuté.

Obrázok 7 znázorňuje výsledok dvoch po sebe idúcich kliknutí (prvé na $K_{3,3}$ a potom na $K_{2,4}$).

Počiatočná konfigurácia

1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1

+

klik $K_{3,3}$

0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

+

klik $K_{2,4}$

0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

=

Výsledná konfigurácia

1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1

Obr. 7

Môžeme postupovať i tak, že najskôr vypočítame výsledok dvoch daných kliknutí ($K_{3,3}$ $K_{2,4}$) a následne vypočítame výslednú konfiguráciu (Obr.8)

Počiatočná konfigurácia

1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1

+

$K_{3,3} + K_{2,4}$

0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

=

Výsledná konfigurácia

1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1

Obr. 8

Mriežku s názvom "$K_{3,3}$ + $K_{2,4}$" na obrázku 6 nazveme ***prepínací diagram*** pre postupnosť kliknutí $K_{3,3}$ $K_{2,4}$.

Pozorne si všimnite rozdiel medzi postupnosťou kliknutí a prepínacím diagramom!

Závery

- postupnosť kliknutí ukazuje, na ktoré svetlá klikáme;
- prepínací diagram ukazuje, ktoré svetlá sa prepínajú.

9. [Objavovanie]

Uvažujme, napríklad, mriežku 7×4 a na nej postupnosť nejakých vybraných troch kliknutí. Prepínací diagram pre danú postupnosť kliknutí môžeme nájsť nasledovne: všetky svetlá sú zhasnuté a vykonáme postupnosť daných troch kliknutí. Hotovo! Vysvetlite, prečo VIDÍTE prepínací diagram daných troch kliknutí.

10. [Objavovanie]

Ako bude vyzerať prepínací diagram na mriežke 7×7, ak klikneme na všetky svetlá vlajky Veľkej Británie: t.j. na všetky svetlá na oboch diagonálach a svetlá v riadku 4 a v stĺpci 4?

11. [Objavovanie]

Na danej mriežke sa dá uskutočniť niekoľko *úplne odlišných* postupností kliknutí (*úplne odlišná* postupnosť znamená: na každé svetlo klikneme iba raz a poradie svetiel nie je podstatné).

a) Koľko úplne odlišných postupností kliknutí existuje na mriežke 1×4?

b) Koľko úplne odlišných postupností kliknutí existuje na mriežke 2×2?

c) Nájdite postupnosť kliknutí pre prepínacie diagramy na obrázku 9 (mriežka 1×4 a mriežka 2×2):

1	0	0	1

0	1	0	0

0	0
0	1

1	0
0	1

Obr. 9

12. [Zadanie B]

Vezmime mriežku 1×5. Na riešenie tohto zadania vám postačí správne premýšľať a svoju odpoveď zdôvodniť. Aplet vám môže veľmi pomôcť.

V **objavovaní 8** ste zistili, že z nulovej konfigurácie na mriežke 1×5 dokážete rozsvietiť všetky svetlá iba dvoma kliknutiami a, samozrejme, dvoma kliknutiami aj všetky svetlá zhasnúť. Postupnosť tých dvoch kliknutí bola $K_1\,K_4$.
K_1 prepne dve svetlá, K_4 ďalšie tri. Prepínací diagram obsahuje päť jednotiek.
Ale existuje i iný spôsob …

a) Prepínací diagram postupnosti kliknutí K_1 K_4 je rovnaký ako prepínací diagram pre postupnosť kliknutí $K_2\,K_5$. Overte.

K_1 K_4 a K_2 K_5 budeme nazývať ***paralelné postupnosti kliknutí***.
Samozrejme, že paralelné postupnosti kliknutí majú zmysel iba vtedy, ak sú tieto postupnosti navzájom odlišné.

Zdá sa, že sme našli výnimočnú situáciu. Ale nie je to tak! V nasledujúcich krokoch odhalíte, že na mriežke 1x5 existuje veľa dvojíc paralelných postupností kliknutí!

b) Ak urobíte postupnosť K_1 K_4 K_2 K_5, nič sa nestane (t.j. konfigurácia sa nezmení) Prečo je to tak?

Odteraz budeme postupnosť kliknutí, ktorá konfiguráciu nezmení, nazývať **tichá postupnosť kliknutí.**

c) Vysvetlite, prečo sú postupnosti kliknutí K_1 K_2 a K_4 K_5 tiež paralelné.

d) Nájdite postupnosť kliknutí, ktorá je paralelná k postupnosti zloženej iba z K_1.

Ak máme dve paralelné postupnosti kliknutí, niektoré kliknutia sa môžu vyskytovať v oboch postupnostiach. Uvedenú skutočnosť práve teraz využijeme.

e) Nájdite postupnosť kliknutí paralelnú k postupnosti K_1 K_2 K_3.

"Recept" pomocou ktorého nájdeme paralelnú postupnosť kliknutí je nasledovný:

K postupnosti kliknutí, ktorú ste si vybrali, pridajte postupnosť K_1 K_2 K_4 K_5 a odstráňte dvojité kliknutia.

Výsledná postupnosť kliknutí je paralelná k postupnosti, ktorou ste začínali.

f) Overte, že opísaný "recept" platí pre všetky prípady, ktoré ste doteraz riešili a vysvetlite prečo.

g) Na mriežke 1×5 existuje 16 dvojíc paralelných postupností kliknutí. Prečo?

13. [Objavovanie]

a) Dokážete nájsť paralelné postupnosti kliknutí na mriežke 1×8. Nájdite pár ku K_1 K_4 K_7.

b) Pre akú najmenšiu mriežku existuje paralelná postupnosť kliknutí?

14. [Objavovanie]

a) Každá mriežka má toľko možných konfigurácií, koľko má možných postupností kliknutí. Prečo?

b) Niekedy mriežka nemá toľko prepínacích diagramov, koľko má postupností kliknutí. Prečo?

Pripomeňme si, čo sme odhalili v **objavovaní 6:**

Riešiteľné konfigurácie sú presne také, ktoré sa dajú získať z počiatočnej nulovej konfigurácie.

c) Takže, z nulovej konfigurácie nedokážeme pre niektoré mriežky vytvoriť všetky konfigurácie. Prečo?

Inak povedané, pre niektoré mriežky existujú také počiatočné konfigurácie, že nedokážeme nájsť postupnosť kliknutí, ktorá by viedla k výslednej nulovej konfigurácií.
Škoda... Ale aspoň o tom vieme.

Pozrime sa na tie konfigurácie, ktoré môžeme vyriešiť a na to, ako ich môžeme vyriešiť.

C: 1×n mriežky a „vzájomne prepínané“ svetlá

V tejto časti sa naučíte techniky, ktoré vám pomôžu preniknúť do hĺbky mriežok typu 1x*n*. Táto časť je úvodná. V Hlavnom zadaní A v DRUHEJ ČASTI môžete svoju prácu dokončiť.

15. [Objavovanie]

V tomto Objavovaní budeme používať mriežku 1×*n*, kde $n > 3$.

a) Aký prepínací diagram patrí k postupnosti $K_2\, K_3$?
   Čo to znamená pre čísla 1 a 4? A pre čísla 2 a 3?

b) Aký prepínací diagram patrí k postupnosti $K_j\, K_{j+1}$?
   Čo to znamená pre čísla j - 1 a j +2?

c) Aký prepínací diagram patrí k postupnosti K_1K_2 a k postupnosti kliknutí $K_{n-1}\, K_n$?
   Ktoré svetlá budú prepnuté?

Myšlienku kliknutí na dve “susedné svetlá” môžeme aplikovať na všetky mriežky typu 1×*n*.

16. [Objavovanie]

Krížiky na mriežke 1×15 označujú postupnosť kliknutí (Obr. 10):

			x	x		x	x		x	x				

Obr. 10

Aký prepínací diagram patrí k danej postupnosti kliknutí (Obr. 10)?

Zhrnutie: uvedenou technikou sa dajú prepínať také svetlá, medzi ktorými ležia tri svetlá. Opakovaním uvedenej techniky môžeme premostiť vzdialenosti, ktoré sú násobkom troch. Na obrázku 10 je vzdialenosť rovná 9.

17. [Zadanie C]

Vezmime si pre ilustráciu mriežku 1×10.
Použitím uvedenej techniky sa môžu svetlá zo skupiny {1, 4, 7, 10} vzájomne prepínať.

a) Akú skupinu svetiel, ktoré sa budú vzájomne prepínať, dostanete k svetlu 2?
   A k svetlu 3?

Svetlá 1 a 2 sa tiež vzájomne prepínajú, podobne aj 9 a 10.

b) Na mriežke 1×10 svietia iba svetlá 1, 3, 7 a 9.
   Nájdite (pomocou príkazu “vytvoriť plán”) postupnosť kliknutí, ktorá vedie k výslednej nulovej konfigurácií.

c) Teraz svietia iba svetlá 1, 3 a 8.
   Akou postupnosťou kliknutí dosiahnete nulovú konfiguráciu?

D: Chasing

Technika, ktorú môžete nájsť online ako spôsob riešenia hry “Zhasnuté svetlá” sa po anglicky nazýva *chasing* (naháňačka, stíhanie).
Daná konfigurácia sa môže riešiť zhasnutím všetkých svetiel vo všetkých riadkoch s výnimkou posledného riadku. To je podstatné. Napríklad v riadku *i* niekoľko svetiel svieti. Klikneme v riadku *i* + 1 (riadok pod riadkom *i*) na všetky svetlá v tých stĺpcoch, v ktorých svetlo v riadku *i* svieti. Začneme prvým riadkom a pokračujeme po riadkoch smerom nadol.

Príklad
Na obrázku 11 je znázornená počiatočná konfigurácia na mriežke 4×3; postupnosť kliknutí $K_{2,1}$ $K_{2,3}$ (podčiarknuté svetlá v riadku 2) ktorá zhasne svetlá (1, 1) a (1, 3). Potom, $K_{3,1}$ $K_{3,3}$ v riadku 3 zhasne svetlá v riadku 2. Nakoniec, $K_{4,3}$ v riadku 4 zhasne svetlá v riadku 3.

Počiatočná konfigurácia

1	0	1
$\underline{0}$	0	$\underline{0}$
0	0	1
0	1	0

→

Riadok 1 zhasnutý

0	0	0
1	0	1
$\underline{1}$	0	$\underline{0}$
0	1	0

→

Riadok 2 zhasnutý

0	0	0
0	0	0
0	0	1
1	1	$\underline{1}$

→

Riadok 3 zhasnutý

0	0	0
0	0	0
0	0	0
1	0	0

Obr. 11

18. [Objavovanie]

a) Vytvorte počiatočnú konfiguráciu podľa obrázka 11 a zhasnite svetlá vo všetkých troch prvých riadkoch pomocou techniky *chasing*.

Počiatočná konfigurácia je technikou *chasing* takmer vyriešená; s výnimkou posledného riadka. Pre tento riadok existuje istý trik. Najskôr ukážeme, že trik funguje, t.j. že určite dosiahneme nulovú konfiguráciu.

b) Kliknite na svetlo (1, 3) a použite techniku *chasing* znova.
Prekvapenie! Nulová konfigurácia!

Môžete sa, prirodzene, opýtať: ako ste prišli na ten čarovný trik kliknúť na (1,3) a nie na iné svetlo alebo na kombináciu svetiel v prvom riadku? Pretože vy nemáte radi hókusy-pókusy, pravda?
Odpovieme čestne:
V riadku 1 sme vyskúšali všetkých osem možných kombinácií jednu po druhej. Kliknutie na (1,3) sa ukázalo byť jediné správne. Chcelo to trochu viac skúšania, ale nie príliš veľa, keďže možností pre prvý riadok bolo práve osem.
Odhaľme teraz, čo presne sa stane pri technike *chasing* po kliknutí na (1,3).

19. [Objavovanie]

Začnime s nulovou mriežkou 4×3.

a) Kliknime na svetlo (1,3). **Veľmi dôležité:** nepoužite príkaz “vytvoriť plán”, ale “okamžité prepnutie po kliknutí”.

b) Použite techniku *chasing*.

Konečný výsledok je presne taký istý ako konečný výsledok po technike *chasing* z počiatočnej konfigurácie!

V skutočnosti sme v **objavovaní 18** postupne vykonali nasledujúce kroky:
- *chasing* počiatočnej konfigurácie
- klik na (1,3)
- *chasing* znova

... *a bolo hotovo*.

c) Vysvetlite, prečo "bolo hotovo" bolo to, čo sme očakávali.

Ostané svetlá a ich kombinácie pracujú presne tak isto. Musíme vyskúšať všetkých osem možností pre prvý riadok!

Pre mriežku 4×3 existuje iba 8 možných postupností kliknutí v riadku 1. Ako ste sa už presvedčili, výsledok sa začína svetlom (1,3) v **objavovaní 18**.

20. [Objavovanie]

Začnite vždy nulovou konfiguráciou v mriežke a použite režim "okamžité prepnutie po kliknutí", (NEPOUŽITE "individuálne nastavenie svetiel").
Začnite nulovou konfiguráciou a pre všetkých osem možných postupností kliknutí použite techniku *chasing* od prvého až po štvrtý riadok. Do tabuľky zapíšte výslednú konfiguráciu:

postupnosť kliknutí v riadku 1	***chasing výsledok v riadku 4***
žiadne kliknutie	....
iba (1, 1)	....
iba (1, 2)	....
iba (1, 3)	1 | 0 | 0
(1, 1) a (1, 2)	....
(1, 1) a (1, 3)	....
(1, 2) a (1, 3)	....
Všetky tri svetlá	....

Obr. 12

21. [Objavovanie]

Začnite takou počiatočnou (náhodnou) konfiguráciou na mriežke 4×3, pre ktorú by ste chceli nájsť riešenie (ak existuje…). Počiatočnú konfiguráciu nazveme konfigurácia *A*.
Po *chasing* dosiahnete situáciu, v ktorej budú jednotky iba v poslednom, štvrtom, riadku.
Ak sa na vás usmeje šťastie, skončíte nulovou konfiguráciou hneď, ale to bude skôr výnimka ako pravidlo!
Ak sú ešte stále v riadku 4 nejaké jednotky, hľadajte postupnosť kliknutí pomocou nulovej konfigurácie. Mala by to byť taká postupnosť kliknutí, pre ktorú na záver, po technike *chasing*, dostanete tú istú situáciu v poslednom riadku ako po chasing pre konfiguráciu *A*.
Takže: v tabuľke na obrázku 12 nájdite vyhovujúcu postupnosť kliknutí v riadku 1, ktorá, po *chasing*u, dá taká istý výsledok ako *chasing A*.
Ukážte, že táto technika *chasing* a (ak je to nutné) *chasing* opakovane, v skutočnosti nepracuje spoľahlivo.

22. [Zadanie D]

Pre mriežku 4x3 existuje 2^{12} možných konfigurácií. Prečo platí, že v tomto prípade sa určite pre všetkých 2^{12} konfigurácií výsledok v riadku 4 po *chasing*u dá nájsť v tabuľke 12 objavovania 20?

E: Konfigurácie a mocniny čísla dva

Táto časť je veľmi všeobecná. O riešení špeciálnych prípadov sa nedozviete nič. Ale získate prehľad o celej množine možných konfigurácií v ktorejkoľvek tabuľke. A tiež o tom, koľko počiatočných konfigurácií je riešiteľných. Kľúčové slová tejto časti zadania sú: *Šikovné počítanie* a *zručné zoskupovanie*.

***Varovanie!** Táto časť je dosť náročná a teoretická. Zaoberajte sa ňou, iba ak vám dopoludnia zvýšil čas. Táto časť je špeciálne určená na riešenie Hlavnej otázky D DRUHEJ ČASTI.*

23. [Objavovanie]

V mriežke 4×3 máme spolu celkom12 svetiel. Každé z týchto svetiel môže svietiť alebo byť zhasnuté. To znamená, že existuje presne 2^{12} možných konfigurácií. Aj mriežky 2×6 a 1×12 majú tiež 2^{12} konfigurácií. Pre počet konfigurácií je dôležitý iba celkový počet svetiel. Nie tvar mriežky! Počet svetiel označíme *N*.

Koľko je možných postupností kliknutí na mriežke, ktorá má *N* svetiel? Do postupnosti kliknutí zarátame aj "žiadne kliknutie".

Triedy prepojených konfigurácií

Použitím prepínacieho diagramu, ktorý je tvorený postupnosťou kliknutí môžete prejsť od jednej konfigurácie k inej konfigurácii. Čo už viete:

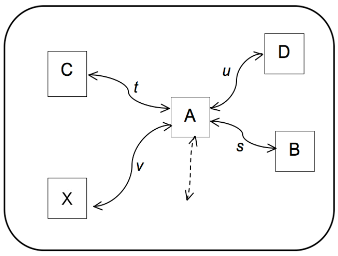
- Ak sa z konfigurácie *A* dá prejsť do konfigurácie *B* pomocou prepínacieho diagramu *s*, potom sa aj z konfigurácie *B* dá prejsť do konfigurácie *A* pomocou toho istého *s*. V takomto prípade budeme konfigurácie *A* a *B* nazývať **prepojené konfigurácie.** Uvedomte si: konfigurácia *A* je prepojená sama so sebou prostredníctvom prepínacieho diagramu zloženého zo samých núl!
- Ak z konfigurácie *A* môžete prejsť do konfigurácie *B* pomocou prepínacieho diagramu *s*, a tiež z *A* pomocou iného diagramu *t* do *C,* potom môžete tiež prejsť z *B* do *C* pomocou postupnosti kliknutí. Alebo inak: Konfigurácie, ktoré sú prepojené s *A,* sú prepojené aj navzájom.

24. [Objavovanie]

Vysvetlite: počet konfigurácií, ktoré sú prepojené s konfiguráciou *A*, je rovný počtu možných prepínacích diagramov.

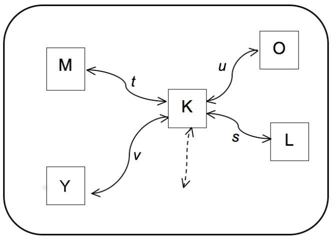
Pamätajte si: často sa stáva, že počet prepínacích diagramov je menší ako počet všetkých možných postupností kliknutí, a teda existuje menej prepínacích diagramov ako počet možných počiatočných konfigurácií. (Ak tomu neveríte, vypočítajte si počet možných konfigurácií na mriežke 1x2 a počet postupností kliknutí... a počet prepínacích diagramov.)

Celá trieda konfigurácií, ktoré sú prepojené s *A* sa bude nazývať *trieda konfigurácií A*. Na obrázku 13 sú vyznačené niektoré prepojenia medzi konfiguráciou *A* a inými konfiguráciami. Samozrejme, obrázok 13 nie je úplný, konfigurácií prepojených s konfiguráciou *A* je pravdepodobne viac. Z *A* vychádzajú prepínacie diagramy označené šípkou a spájajú konfigurácie, ktoré sú prepojené s *A*. Ďalšie konfigurácie v triede konfigurácií sú tiež prepojené, ale to na obrázku 13 nie je nakreslené.
Obdĺžnik so zaoblenými rohmi ohraničuje triedu konfigurácií *A*.



Obr. 13

Konfigurácia *K* nie je konfigurácia triedy *A;* z *K* vychádza šípka prepínacieho diagramu a smeruje do inej konfigurácie, ktorá je prepojená s *K.* Všetky takéto konfigurácie tvoria triedu konfigurácie *K*.



Obr. 14

A takto môžeme postupovať ďalej. Je zrejmé, že celá množina konfigurácií môže byť rozložená na triedy konfigurácií.

25. [Objavovanie]

Predstavte si: *A* a *K* nie sú prepojené. *X* je konfigurácia z triedy *A* a *Y* je konfigurácia z triedy *K.* Potom *X* a *Y* nie sú navzájom prepojené.

a) Dokážete to vysvetliť?
Vaše vysvetlenie môže začínať napríklad opísaním pozorovaného:
'ak by *X* a *Y* boli prepojené, potom ... a ... tiež by mohlo byť...'

Môžeme vyhlásiť: triedy konfigurácií *A* a *K* sú neprepojené.

b) Všetky riešiteľné konfigurácie tvoria jednu triedu konfigurácií. Vysvetlite!

Samozrejme, že platí i nasledovné: Ak *B* patrí do triedy konfigurácií *A*, potom trieda konfigurácií *B* je presne taká istá ako trieda konfigurácií *A*.

Záver

Množina všetkých konfigurácií je rozdelená na triedy konfigurácií.

- Všetky konfigurácie v jednej triede konfigurácií sú navzájom prepojené.
- Konfigurácie, ktoré patria do odlišných tried konfigurácií, nie sú navzájom prepojené.

26. [Objavovanie]

a) Ak sčítame počet konfigurácií vo všetkých triedach, výsledok je 2^N. Prečo?

b) Prečo majú všetky triedy konfigurácií rovnakú veľkosť? A aká je to veľkosť (porovnajte s prepínacími diagramami)?

c) Vysvetlite rovnicu:

(Počet tried konfigurácií) × (počet prepínacích diagramov) = 2^N.

d) Prečo čísla, ktoré predstavujú "počet tried konfigurácií" a "počet prepínacích diagramov" majú iba tvar 2^p, kde p = 0, 1, 2, 3, ...?

e) Odvoďte a vysvetlite (použite predchádzajúce pozorovanie a objavovania):

(Počet tried konfigurácií) × (počet riešiteľných konfigurácií) = 2^N.

DRUHÁ ČASŤ: Vlastné skúmanie

V PRVEJ ČASTI sme objavovali rôzne techniky, ako napríklad *vzájomné prepínanie* (vytváranie skupín svetiel, ktoré môžu byť vzájomne prepínané) a *chasing*. Zaviedli sme tiež niekoľko pojmov: *prepínací diagram, paralelná postupnosť kliknutí* a *tichá postupnosť kliknutí*. Uvedené techniky a pojmy oceníte pri práci na vlastnom skúmaní úloh Hlavného skúmania.

Vyberajte rozumne: Uvedomte si, že budú viac hodnotené hlboké a dôkladné riešenia dvoch Hlavných zadaní ako povrchné riešenia troch alebo štyroch Hlavných zadaní.

Hlavné zadanie A: mriežky 1×*n*

Uvažujme mriežku 1×*n* s náhodnou počiatočnou konfiguráciou. Použite Objavovania z časti A a určte, ktoré počiatočné konfigurácie na mriežke 1×*n* nemôžu byť riešiteľné**.** Pokúste sa o analýzu všetkých hodnôt *n*.

Hlavné zadanie B: Chasing

Chasing a *tichá postupnosť kliknutí* môžu byť využité na analýzu náhodnej počiatočnej konfigurácie na mriežke *m*×*n*, aby sme zistili, či je daná počiatočná konfigurácia riešiteľná.

a) Analyzujte počiatočnú konfiguráciu na mriežke 5×5 (originálna hra), ktorá bude riešiteľná. Použite všetky možné výsledné konfigurácie techniky chasing od prvého riadku počiatočnej nulovej konfigurácie.

b) Dokážete teraz vyriešiť záhadu 3 z úvodných záhad na rozcvičenie pomocou cielených postupností kliknutí?

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Obr. 15

c) Čo dokážete objaviť o mriežke *m*×*n* s náhodnou počiatočnou konfiguráciou? Analyzujte, napríklad, mriežku *m*×3.

Hlavné zadanie C: Všetko svieti, všetko je zhasnuté.

Pre každú mriežku *m*×*n*, ktorá je vyplnená iba jednotkami, platí, že sa dá nájsť postupnosť kliknutí, ktorá vedie k nulovej konfigurácií. V **objavovaní 8** sme už skúmali mriežku 1×*n.*

a) Skúmajte riešiteľnosť mriežky 2×*n*.

b) Skúmajte niekoľko prípadov na mriežke *n*×*n* pre *n*= 2, 3 a 4.

Hlavné zadanie D: triedy konfigurácií a postupnosti kliknutí

Toto Hlavné zadanie úzko súvisí s objavovaním v PRVEJ ČASTI, časť E. Ak ste pre nedostatok času vynechali časť E, nemá zmysel riešiť nasledujúcu časť Hlavného zadania!

Pekné tvrdenie:

Počet tried konfigurácií = počet tichých postupností kliknutí

a) Skúmajte uvedené tvrdenie.
Pomôcka: Rozdeľte postupnosť kliknutí do skupín podľa paralelných kliknutí.

b) Ďalšie zábavné výskumné otázky:

1. Počet riešiteľných počiatočných konfigurácií na mriežke m×n.

V tomto prípade máme $N = m \times n$. Uvažujme iba $m \geq n$.
Ak danú počiatočnú konfiguráciu riešite technikou chasing, dostanete výslednú konfiguráciu so samými nulami v riadkoch 1, 2, až po m-1 a možno nejakými jednotkami v riadku m.

Dve tvrdenia, ktoré môžete využiť (predtým by ste, samozrejme, mali overiť, či sú korektné):

- Počiatočná konfigurácia a výsledná konfigurácia patria do tej istej triedy konfigurácií.
- Existuje maximálne 2^n rôznych výsledných konfigurácií po uplatnení techniky chasing, teda platí, že existuje tiež maximálne 2^n tried konfigurácií.

→ Ukážte, že na mriežke $m \times n$, $m \geq n$, vždy existuje najmenej $2^{(m-1) \cdot n}$ riešiteľných konfigurácií.

2. Na mriežke 5×5 je iba 25% zo všetkých počiatočných konfigurácií riešiteľných.

→ Skúmajte toto tvrdenie.

Pomôcka: Použite poznatky získané v Hlavnom zadaní B a v Objavovaní v PRVEJ ČASTI, časť E.