

Matematický B-deň 2013

Odrazy v zrkadlách

Periskop

Fotografiu môžete nájsť na www.geheugenvannederland.nl



Prvá svetová vojna: Muž v zákope sa pomocou periskopu pozerá ponad obranný múr, 1915.

Objavovanie 1 Takto to funguje!

Zamyslite sa nad princípom periskopu, venujte tejto aktivite aspoň 10 minút. Môžete si pomôcť aj vyhľadáním informácií na internete, napríklad zadaním slova “periskop” vo vyhľadávači Google.

Pri vysvetľovaní a náčrtoch, ako vzniká obraz pomocou periskopu použite výrazy: “zrkadlá” a “svetelné lúče”. Dnešný Matematický B-deň bude o takýchto princípoch.



Predstavujeme Matematický B-deň 2013

Dnešná téma

Počas dnešného dňa sa budeme zaoberať zrkadlami a lúčmi svetla. Zrkadlá poznáte. Mnimálne raz za deň sa pozeráte do zrkadla (alebo na zrkadlo? ☺) a určite ste si všimli, že v zrkadle toho vidíte oveľa viac, nie iba seba! Svetelné lúče, samozrejme, nie sú viditeľné. Ak chceme pochopiť princíp, ako zrkadlá pracujú (a ako spolupracujú), bude potrebné, aby ste si svetelné lúče načrtli alebo presne narysovali ako časti priamok. Možno ste to už urobili pri diskusii počas objavovania princípu periskopu v Objavovaní 1. Témou dnešného dňa je objavovanie a vysvetľovanie rôznych vlastností zrkadiel a zrkadlových obrazov.

Z čoho dnešný deň pozostáva

Zadanie tímovej matematickej súťaže Matematický B-deň (písmeno **B** znamená **B**ádatel'ský), ktoré práve čítate, pozostáva z troch častí: *základné poznatky, vlastné skúmanie, napísanie a odovzdanie záverečného riešenia*.

- *Základné poznatky* sú prípravou k riešeniu úloh v časti 2: *vlastné skúmanie*. Budete sa zaoberať jednoduchými i viacnásobnými zrkadlami a odhalíte všetky vlastnosti zrkadiel a svetelných lúčov. Úlohy a otázky určené k objavovaniu (pomenované *Objavovanie*) sú určené k tomu, aby ste objavili nový poznatok. V texte sa nachádzajú aj otázky (nazvané *Zadania*). Každú odpoveď na otázku nazvanú *Zadanie* musíte vo svojom záverečnom riešení správne matematicky zdôvodniť.
- Počas riešenia, ktoré sa nazýva *vlastné skúmanie*, si vyberiete aspoň dva z problémov označené ako A, B, a C. Otázky a úlohy určené na skúmanie rozvíjajú odpovede a poznatky, ktoré ste získali z časti *základné poznatky*. Problém a skúmanie, označený písmenom D si žiada prekonať rekord. Problém D môžete riešiť iba v prípade, že vám na riešenie zostane čas.
- V časti *záverečné riešenie* opíšete svoje *vlastné skúmanie*. Je veľmi dôležité, aby ste *vlastné skúmanie* popísali jasne a zrozumiteľne. Text môžete doplniť vlastnými obrázkami všade tam, kde je to podľa vás vhodné či žiaduce. Text vášho *záverečného riešenia* by mal byť zrozumiteľný aj pre takého čitateľa, ktorý síce matematike rozumie, ale nepozná zadanie dnešnej súťaže Matematický B-deň.
- To znamená, že riešenie musíte vysvetliť jasne a veľmi čitateľne. V texte sa môžete odvolávať i na poznatky a fakty, ku ktorým ste sa dopracovali a ktoré ste odhalili riešením otázok a úloh v časti *základné poznatky*.
- Zhrnuté: napíšete svoj vlastný jasný a zrozumiteľný príbeh, ktorý je podložený matematickými argumentami. V hodnotení vášho *záverečného riešenia* budú zohľadnené nielen vaše matematické úvahy, ale aj spôsoby a štýl vášho vyjadrovania a zápisu.

Experimentovanie: pomôcky

Dôležitou súčasťou dnešného dňa je experimentovanie so zrkadlami.

- Budete mať k dispozícii zrkadlá a lepiacu pásku. Spojením zrkadiel pomocou lepiacej pásky môžete experimentovať pri hľadaní odpovedí na otázky všade tam, kde to bude vhodné.
- V zadaní nájdete tiež aplet, ktorý simuluje priestor so zrkadlami i ďalšie konštrukcie vytvorené z viacerých zrkadiel.



Návrh, ako by ste mali využiť čas počas súťaže:

- Venujte dostatok času tomu, aby ste zvládli a úplne pochopili princíp odrazov v zrkadle a techniky, ktoré s tým súvisia. Tejto časti venujte najmenej 90 minút.
- Vyberte si dva z troch problémov A, B alebo C z časti *Vlastné skúmanie*.
- Vaše riešenie musí byť napísané v programe Word MS Office. V prípade, že odovzdáte časť riešenia napísanú rukou, použite čierne pero, aby bol rukopis dobre čitateľný aj po zoskenovaní a kopírovaní.

Veľa zábavy a veľa šťastia pri riešení úloh zadania Matematický B-deň 2013!

Základné poznatky

A. Vzťah medzi súmernosťou a zrkadlovým obrazom

Osová súmernosť



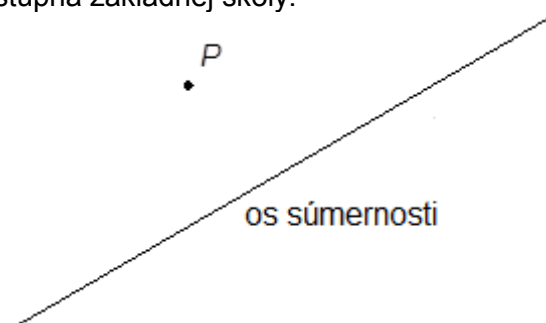
Na obrázku je motýľ *Attacus atlas*, ktorý je na základe rozpätia krídel považovaný za najväčšieho motýľa na svete. Kresby na motýľích krídlach sú (takmer) presne osovo súmerné.

Osovú súmernosť ako zhodné geometrické zobrazenie nie je nutné zvlášť predstavovať. Dôkaz existencie osovej súmernosti kresby na krídlach motýľa môžeme pozorovať vtedy, keď motýľ svoje krídla zavrie ☺.

Objavovanie 2 Os súmernosti

Na obrázku nižšie je znázornená priamka, ktorá je osou súmernosti. Pomocou pravítka a kružidla alebo pomocou trojuholníkového pravítka s ryskou vieme zostrojiť obraz bodu P v osovej súmernosti podľa danej osi súmernosti. Bod P nazývame vzor, bod P' nazývame obraz bodu P v danej osovej súmernosti.

Predstava, že bod P leží na ľavom krídle motýľa a bod P' leží na pravom krídle motýľa, patrí do matematiky druhého stupňa základnej školy.



- Bod P' najjednoduchšie zostrojíme pomocou trojuholníkového pravítka s ryskou.
- Zopakujte si poznatky o vlastnostiach osovej súmernosti: V akom vzťahu je os súmernosti s priamkou PP' ? Čo platí pre vzdialenosti bodov P a P' od osi súmernosti?

I keď sme zrkadlo na konštrukciu bodu P' nepoužili, môžeme bod P' nazývať aj zrkadlový obraz bodu P . Prečo? Vysvetlíme neskôr.

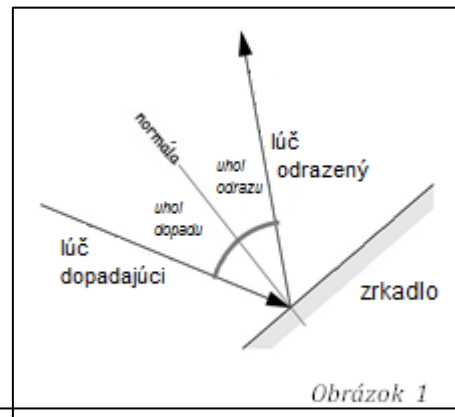
Zákon odrazu

Svetelný lúč, ktorý dopadne na zrkadlo, sa od zrkadla odráža. Je zrejmé, že vo všeobecnosti neplatí, že sa odrazí späť "sám do seba":

Princíp odrazu svetelného lúča pre dopade na zrkadlo:

Uhol odrazu sa rovná uhlu dopadu.

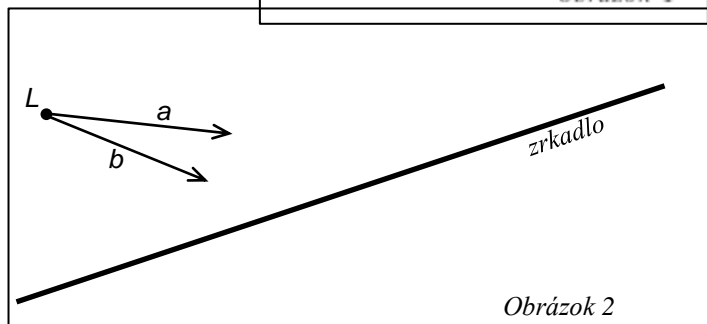
Veľkosti uhlov dopadu a odrazu sa určujú vzhľadom na *normálu*. *Normála* je priamka kolmá na zrkadlo. Obrázok 1 ilustruje situáciu, ak sa na zrkadlo pozrieme "zhora". Uvedený princíp odrazu je fyzikálnou vlastnosťou zrkadla. Túto fyzikálnu vlastnosť budeme využívať pri skúmaní. Budeme ju nazývať zákon odrazu.



Obrázok 1

Od odrazu k zrkadlovému obrazu

Písmenom *L* je na obrázku 2 označený zdroj svetla, napríklad obyčajná žiarovka. Žiarovka vyžaruje svetelné lúče na všetky strany. Dva z týchto lúčov (*a* a *b*) sú zobrazené ako orientované úsečky. Na schématickom obrázku 2 je zobrazená úsečka, ktorá predstavuje zrkadlo. Predná (zrkadliaca) strana zrkadla je obrátená smerom k zdroju svetla. Zadná strana zrkadla svetelné lúče neodráža.



Obrázok 2

Obrázok 2 je podobne, ako obrázok 1 schémou situácie, na ktorú sa pozeráme zhora, sponad zrkadla. Inak povedané: situáciu sme umiestnili do roviny a zaoberáme sa vzťahmi medzi svetelnými lúčmi a zrkadlom v rovine, nie v priestore.

Zadanie 1 Odkiaľ prúdia odrazené svetelné lúče?

- Najskôr si narysujte svetelné lúče *a* a *b* a zrkadlo. Použite zákon odrazu a narysujte svetelné lúče, ktoré sú odrazom lúčov *a* a *b* v zrkadle.
- Odrazené lúče sú polpriamky. Dorysujte ich ako priamky, t.j. dorysujte aj časti, ktoré ležia za zrkadlom. Označte si priesečník týchto priamok po ich predĺžení za zrkadlom.
- Poloha priesečníka priamok za zrkadlom je vzhľadom na zdroj svetla špeciálna! Aká je to poloha? Dokážte správnosť svojho zdôvodnenia.

Záver

Zdá sa, že pre odraz svetelných lúčov v rovinnom zrkadle platí: zdrojom odrazených lúčov je virtuálny zdroj svetla za zrkadlom. Tento virtuálny zdroj svetla je obrazom reálneho zdroja svetla v osovej súmernosti podľa osi súmernosti, ktorou je priamka reprezentujúca rovinné zrkadlo. (Dohoda: pre ľahšiu čitateľnosť textu budeme v ďalšom texte priamku, ktorá predstavuje rovinné zrkadlo nazývať skrátene: zrkadlo.)

Zdrojom svetla je každý predmet

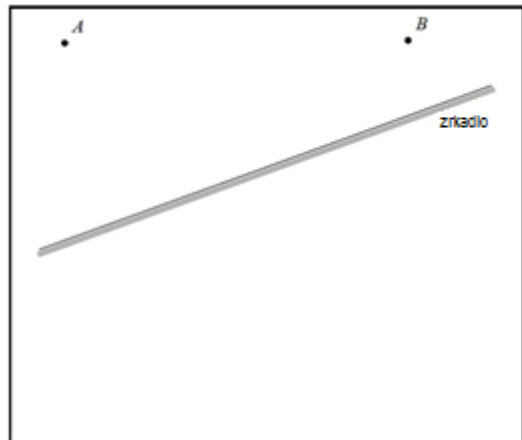
Všetko, čo platí pre žiarovku v Zadaní 1, platí i pre ostatné predmety, ktoré žiarovkami nie sú. Každý predmet, ktorý vidíme, je zdrojom svetla. Vidíme predmet, pretože od nich prúdia svetelné lúče do našich očí. Svetlo môže pochádzať pôvodne z iného zdroja (Slnko, žiarovka, svietidlo), ale to nie je pre naše zadanie podstatné.

Zadanie 2 Odkiaľ sa ten lúč berie?

- a. Narysujte si obrázok 3 a zostrojte svetelný lúč, ktorý vychádza z bodu A a po odraze od zrkadla prechádza bodom B . Majte na pamäti zákon odrazu!

Pravdepodobne ste zostrojili bod A' , ktorý je obrazom bodu A v osovej súmernosti podľa osi, ktorou je zrkadlo. Priesečník priamky $A'B$ so zrkadlom je bod, v ktorom sa lúč vychádzajúci z bodu A , odráža od zrkadla.

- b. Platí to i pre opačnú situáciu, keď lúč vychádza z bodu B a odrazí sa do bodu A ? Platí analogická situácia i pre obraz B' bodu B ? Dostanete ten istý výsledok? Svoju odpoveď matematicky zdôvodnite.



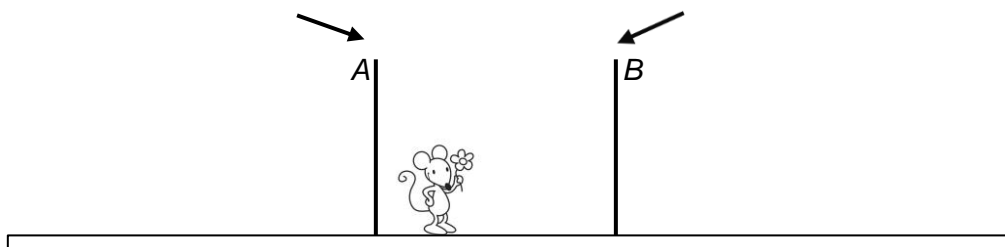
Obrázok 3

B. Viac zrkadiel, oveľa viac obrazov

V ďalšom zadaní budete pracovať s viac ako jedným zrkadlom. Budete sa zaoberať odrazmi odrazu. Už sme si ukázali jeden príklad použitia viacerých zrkadiel. Bol to periskop v Objavovaní 1. V tejto časti bude veľmi užitočné experimentovanie s viacerými zrkadlami, ktoré máte k dispozícii. Do obrazu vás uvedú nasledujúce dva príklady a teoretické poznatky, ktoré za nimi nasledujú.

Objavovanie 3 Úvodný experiment

Pripravte si situáciu ako na obrázku 4. Použite dve zrkadlá (A a B) a myšku s kyticou v jednej labke, prípadne použite iný predmet, ktorý má jednoznačne odlišenú ľavú a pravú stranu. Zrkadlá umiestnite čo najpresnejšie tak, aby boli navzájom rovnobežné a zároveň kolmé na podložku (stôl). Situácia na obrázku 4 je zobrazená z pohľadu spredu. Myška stojí medzi zrkadlami a pozerá sa na vás.



Obrázok 4

- a. Ak sa pozriete zhora ponad jedno zrkadlo v smere šípky, uvidíte obraz myšky v druhom zrkadle. Nakreslite si obrázok myšky, ako ju vidíte v druhom zrkadle, v zrkadle oproti šípke. Napríklad prvý obrázok bude obraz myšky v zrkadle B , keď sa pozeráme ponad zrkadlo A . Takýto obraz označíme A' , pretože je to obraz zo zrkadla A v zrkadle B .
- b. Nakreslite aj druhý obrázok, pohľad zhora ponad druhé zrkadlo, v smere druhej šípky. Bude to obraz B' , obraz zo zrkadla B v zrkadle A . Nakreslite si tieto dva obrázky veľmi pozorne, nakreslite kyticu kvetov do tej správnej labky. Použite **Pracovný list 1**. Zrkadlá A a B a priestor medzi nimi, vrátane myšky, sú reálne objekty, predstavujú reálny svet. Takúto časť reálneho sveta nazývame *základná bunka*. Priestor medzi zrkadlom A a B' (vrátane obrazu myšky) je odraz, zrkadlový obraz tejto základnej bunky (v zrkadle A). Nazývame ho *virtuálna bunka*.
- c. Do **Pracovného listu 1** zobrazte ďalšie virtuálne bunky (niekoľkokrát zopakované zrkadlové obrazy) s obrázkami myšiek.
- d. Akú štruktúru môžete nájsť v takýchto postupnostiach buniek? Odhalili ste, že pomocou dvoch zrkadiel sa dá vytvoriť nekonečný počet zrkadlových obrazov, nekonečný počet virtuálnych buniek, ale to nie je ešte všetko!

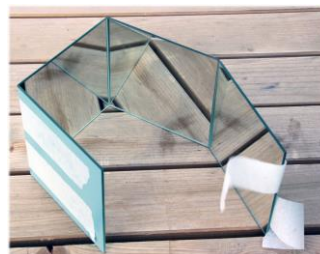
Od nano-klavíra po nekonečno krát nekonečno

Toto klavírne krídlo je postavené z nano-lega. Má veľkosť asi päť centimetrov.

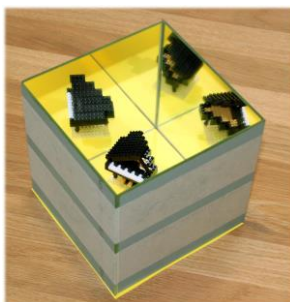


Zo štyroch zrkadiel zostrojíme priestor s pôdorysom štvorca. Pozrite si fotografie a postupujte presne podľa inštrukcií. V tejto časti objavíte ďalšie zákonitosti a preto je lepšie experimentovať so zrkadlami, ako kresliť na papier.

Položte štyri zrkadlá zrkadliacou plochou nadol. Zlepte ich spolu pomocou dvoch pásov lepiacej pásky a pozorne zložte tak, aby ste dostali uzavretý priestor so štvorcovým pôdorysom, zrkadliace



plochy sú vo vnútri. Zostrojili ste štvorcový zrkadliaci priestor.



Položte nano-klavírne krídlo alebo iný asymetrický predmet dovnútra štvorcového zrkadliaceho priestoru. Je zrejmé, že môžete pozorovať niekoľkonásobný odraz predmetu v zrkadlách.

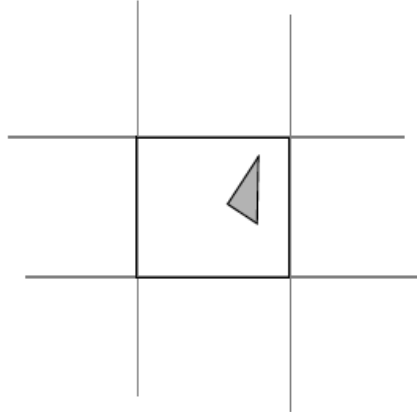
Ak sa pozriete do vnútra štvorcového zrkadliaceho priestoru zhora, ponad niektorý jeho roh, môžete



vidieť obrázok podobný obrázku na fotografii.

Ak sa skloníte trochu nižšie, dovidíte ďalej a odhalíte nekonečný (zrkadlový) virtuálny priestor. Poobzerajte si čo vidíte a prídete k záveru: nano-klavíry stoja v radoch podľa takej istej štruktúry ako myška s kyticou. Vo virtuálnom zrkadlovom svete existuje nekonečne veľa radov jeden vedľa druhého. Nekonečný rad radov a všetky majú tú istú štruktúru.

Tak, ako pri experimente s dvoma rovnobežnými zrkadlami, i pri zrkadliacom priestore zo štyroch zrkadiel môžeme uvažovať o základnej bunke (štvorec, vytvorený štyrmi zrkadlami a originálny predmet vo vnútri) a jej rôznych kópiách (odrazy a odrazy odrazov), ktoré vypĺňajú celú rovinu. Na obrázku je nakreslená základná bunka. Nano-klavír je nahradený symbolickým tvarom - všeobecným trojuholníkom. Na základnú bunku a na virtuálne bunky, ktoré základnú bunku obklopujú, sa pozeráte zhora.



Zadanie 3: Zobrazovanie štruktúry

- Zostrojte presné obrazy trojuholníka v každej virtuálnej bunke, použite **Pracovný list 2**.
- Ktoré virtuálne bunky vyzerajú rovnako ako základná bunka? Dokážete odhaliť pravidelnosť? Vysvetlite matematicky.

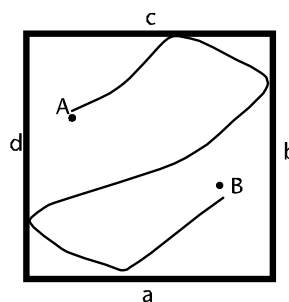
C. Metóda ROZKLADANIA: Cesta svetla niekoľkými zrkadlami

Pokračujeme v úvahách podobných ako v Zadaní 2: hľadáme cestu svetelného lúča, ak je daný bod, z ktorého svetlo vychádza a bod, ktorým musí prejsť, pričom svetelný lúč sa odráža postupne od jedného a viacerých zrkadiel.

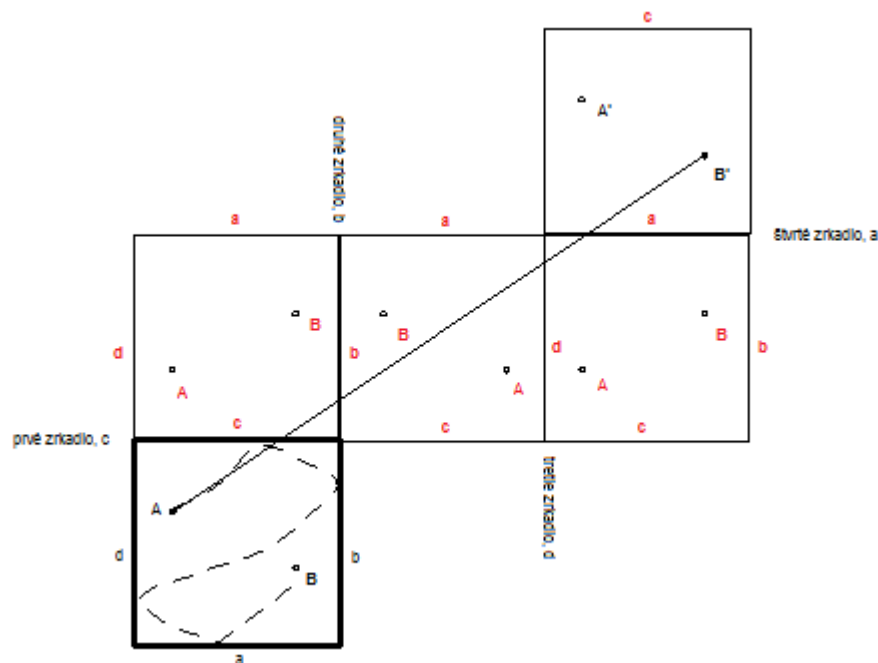
Problém sa dá modelovať i pomocou svetelného laserového pera (svetelné pero s veľmi úzkym svetelným lúčom). Svetlo vysielané z pera sa odráža od zrkadiel a po niekoľkých odrazoch prechádza bodom B.

Príklad

Na obrázku vidíte zrkadlový priestor so štvorcovým pôdorysom (zrkadlové steny sú pomenované *a*, *b*, *c*, *d*). V priestore je daný bod B, ktorým má svetelný lúč prechádzať. Svetelný lúč vychádza z bodu A a odráža sa postupne od zrkadiel *c*, *b*, *d* a *a*. Situácia sa dá načrtnúť pomerne jednoducho:



K nájdeniu presného riešenia, zobrazujeme základnú bunku s danými bodmi A a B postupne podľa zrkadiel c , b , d a a .



Na záver, po uskutočnení postupnosti zobrazení základnej bunky, narysujeme úsečku, ktorá spája bod A a bodom B' .

Objavovanie 4 Zostrojte cestu svetla v pôvodnom štvorci

Zostrojte celú cestu svetelného lúča v základnej bunke. V skutočnosti to znamená, že zobrazíte úsečku AB' ako lomenú čiaru vo vnútri základnej bunky. Konštrukcia bude pomerne jednoduchá, stačí, ak si postupne nájdete body, v ktorých sa svetelný lúč odráža od jednotlivých zrkadiel!

Zadanie 4 Z A do A' je to tiež možné

- Narysujte cestu svetelného lúča z bodu A do bodu A' . Všimnite si, že postupnosť zrkadiel musí v tomto prípade byť c , b , a , d . Narysujte výslednú cestu do základnej bunky, použite **Pracovný list 3**.
- Ak by ste vy samotní stáli v reálnom štvorci obklopenom zrkadlami, cesta svetelného lúča AA' z časti **a**. tohto zadania znamená, že môžete v zrkadle vidieť sami seba. Ale vidíte sa spredu alebo zozadu? Alebo dokonca z boku?
- Môžete sa vidieť, ak sa váš obraz (svetelný lúč) odrazí iba trikrát? Ako sa budete vidieť teraz?

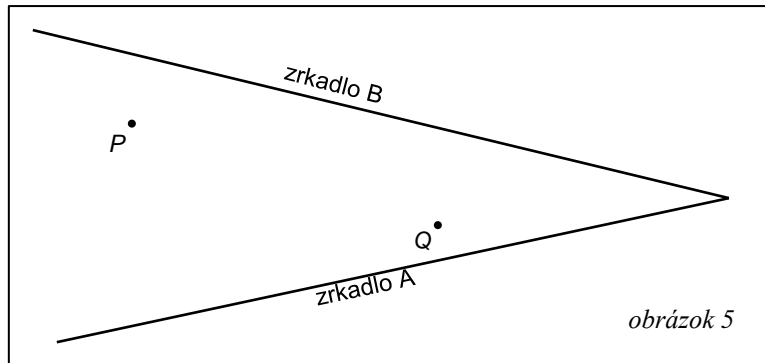
Zhrnutie metódy ROZKLADANIA a ďalšie príklady

Riešenie príkladu z predošlej strany bude rýchlejšie, ak si najskôr hneď narysujete väčšie množstvo štvorcov, akoby ste zostrojovali štvorčekový papier. Potom nájdite jednotlivé body odrazu vo virtuálnych bunkách (presne podľa spôsobu použitého v Zadaní 4). Najmä v prípade štvorcov je konštrukcia jednoduchá.

Všeobecne – pre iné tvary základných buniek, ktorými sa budeme zaoberať ďalej, má zmysel riešiť úlohu postupne, od zrkadla k zrkadlu. Na vyriešenom príklade môžete pozorovať, že postup pripomína rozkladanie poskladaného obrázka, preto sme túto metódu riešenia nazvali METÓDA ROZKLADANIA.

Zadanie 5: Medzi dvoma polpriamkami

Priestor medzi dvoma polpriamkami (dve zrkadlá, ktoré sa dotýkajú jednou stranou v určitom uhle) môže byť tiež základnou bunkou v zmysle METÓDY ROZKLADANIA. Pozri obr. 5. Použite **Pracovný list 4** na riešenie tohto zadania.



- Narysujte presne cestu svetelného lúča z bodu P do bodu Q cez odrazy v zrkadle B a v zrkadle A . Vysvetlite svoju metódu riešenia.
- Narysujte tiež cestu svetelného lúča z bodu P do bodu P , ak sa postupne odráža od zrkadiel B , A , B a A .

V biliarde sa biliardová guľa odráža od mantinelu biliardového stola na základe zákona odrazu. Biliardovú guľu odrazíme úderom špeciálnou palicou (tágo) do jej stredu. Na pohyb biliardovej gule po biliardovom stole môžeme tiež použiť METÓDU ROZKLADANIA.



Obrázok 6

Na Obrázku 6 je biliardový stôl s dvoma guľami. Odrážte biliardovú guľu A tak, aby sa dotkla gule B , ale predtým sa musí trikrát odraziť od mantinelov, pričom od toho istého mantinelu sa môže odraziť najviac dvakrát.

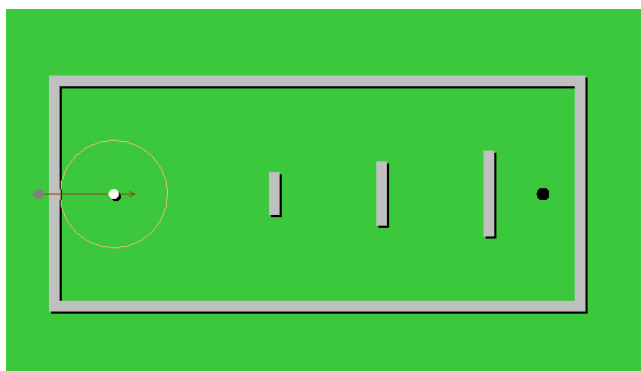
Objavovanie 5 Troj-mantinelový biliard

Navrhnite niekoľko rôznych spôsobov pre pohyb biliardovej gule A , aby sa dotkla gule B , ale predtým sa musí trikrát odraziť od mantinelov.

Aj minigolf sa hrá na základe podobných princípov.

Objavovanie 6 Minigolf (na matematickom webe)

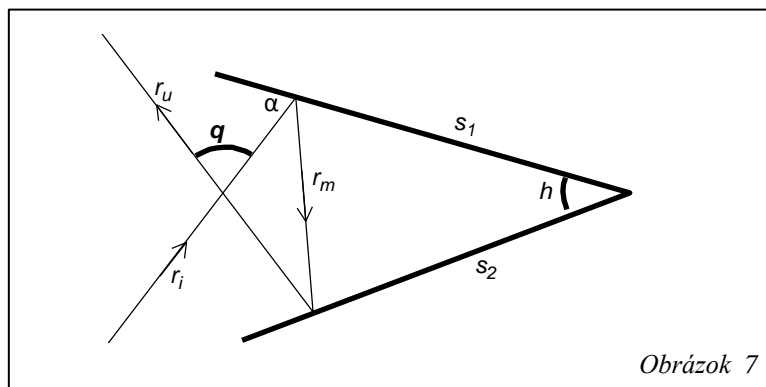
- Zahrajte si online minigolf.
<http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03015/opgave4.html>.
- Narysujte *presne* pohyb minigolfovej loptičky po hracej ploche. Existuje viacero riešení?



D. Cesta svetla niekoľkými zrkadlami

Zadanie 6 Odraz v dvoch zrkadlách

Predstavte si svetelný lúč, ktorý sa odráža od dvoch zrkadiel s_1 a s_2 .



Obrázok 7

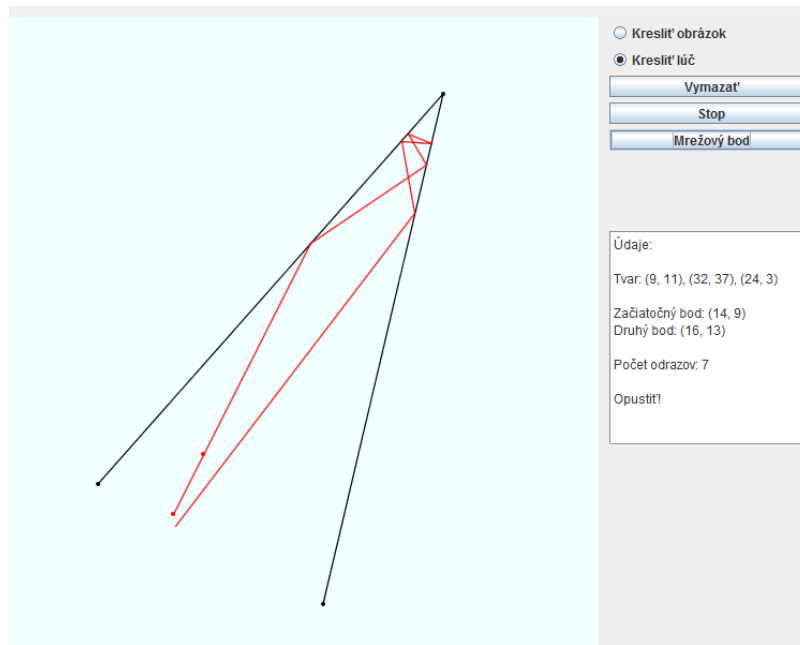
Uhol, ktorý dve zrkadlá zvierajú je označený h ; uhol dopadu lúča r_i a zrkadla s_1 je označený α . Uhol medzi dopadajúcim lúčom r_i a odrazeným lúčom r_u je označený q . Otázka znie, či existuje vzťah medzi uhlami h a q .

Pozrite sa na situáciu, ak $h = 40^\circ$ a $\alpha = 60^\circ$.

- Akú veľkosť má uhol q pre dané hodnoty?
- Čo sa zmení, ak uhol dopadu lúča bude $\alpha = 80^\circ$ a ak zostane $h = 40^\circ$?
- Vyskúšajte niekoľko iných číselných kombinácií h a α . Sformulujte tvrdenie o vzťahu h a q .
- Pokúste sa demonštrovať všeobecne (nie iba pomocou konkrétnych číselných hodnôt) pravdivosť svojho tvrdenia.
- Ak zrkadlá zvierajú určitý špeciálny uhol h , svetelný lúč sa odrazí presne v opačnom smere. Aká bude potom veľkosť uhla q a aká musí byť veľkosť uhla h ?

Digitálne experimentovanie

Pomocou apletu môžete zobrazovať otvorené alebo uzavreté zrkadlové priestory. Príkazom “Kresliť obrázok” nakreslíte zrkadlový priestor. Príkaz “Kresliť lúč” vykreslí svetelný lúč, ktorý je daný dvoma bodmi (Začiatočný bod a Druhý bod). Tieto dva body určujú svetelný lúč, ktorý vchádza do zrkadlového priestoru. Aplet potom vykreslí cestu svetelného lúča priestorom. Ukážka:



Aplet zobrazuje súradnice bodov, v ktorých sa svetelný lúč od zrkadiel odráža a tiež súradnice začiatočného bodu a druhého bodu svetelného lúča.

Príkaz “Mriežka” musíte použiť, keď je pri riešení problému povolené použiť iba celočíselné súradnice (v zadaniach Vlastné skúmanie C a D).

Čo by ste ešte mali vedieť:

- Príkaz “Vymazať” vymaže celú obrazovku. Zrkadlový priestor, ktorý ste si zvolili, zmizne. Ak chcete zistiť cestu iného svetelného lúča v tom istom zrkadlovom priestore, zvolte príkaz “Kresliť lúč” a zvolte dva nové body, ktorými bude nový lúč určený.
- Príkazom “Kresliť obrázok” sa nakreslí zrkadlový priestor. Ťahom počítačovou myšou môžete zvoliť vrcholy zrkadlového priestoru.
- Príkaz “Stop” budete potrebovať, keď sa cesta svetelného lúča zacyklí.

Dôležité:

- Pomocou príkazu “Kresliť obrázok” aplet nakreslí otvorený priestor. Ak chcete priestor uzavrieť, zvolte posledný vrchol veľmi blízko prvého vrchola, respektíve posledný vrchol by mal byť totožný s prvým vrcholom.
- Ak sa v otvorenom zrkadlovom priestore svetelný lúč odrazí do vrchola, vo vrchole sa zablokuje a aplet takúto situáciu oznámi: “Zablokované vo vrchole”.
- Pri používaní apletu sa môže stať, že sa proces kreslenia zacyklí. Na reštartovanie apletu použijete príkaz “Stop”.

Vlastné skúmanie

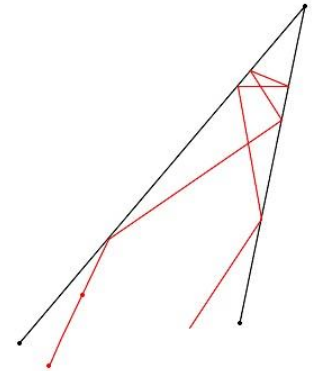
Z nasledujúcich zadaní A, B a C, ktoré sú určené na vlastné skúmanie, si vyberte dve zadania.

Ak máte v úmysle v tejto súťaži vytvoriť rekord, riešte aj zadanie D.

Hlavné zadanie A: Dve zrkadlá zvierajú (malý) uhol

Položte dve zrkadlá kolmo na stôl a spojte ich zozadu lepiacou páskou tak, aby spoj bol ohybný. Ohybnosť spoja vám dovolí zmeniť uhol, ktorý tieto dve zrkadlá zvierajú.

Ak do priestoru medzi dve zrkadlá položíte nejaký predmet, okamžite uvidíte niekoľko zrkadlových obrazov tohto predmetu v závislosti od toho, aká je veľkosť uhla, ktorý zrkadlá zvierajú.



Otázky, ktoré by vás mali inšpirovať k vlastnému skúmaniu:

- Aký je vzťah medzi počtom zrkadlových obrazov a veľkosťou uhla, ktorý zrkadlá zvierajú?
- Ak má veľkosť uhla, ktorý dve zrkadlá zvierajú, dostatočnú veľkosť, uvidíte v zrkadlách niekoľkokrát svoj vlastný obraz. Koľkokrát sa uvidíte? Záleží to od veľkosti uhla, ktorý zrkadlá zvierajú? Ak áno, ako?

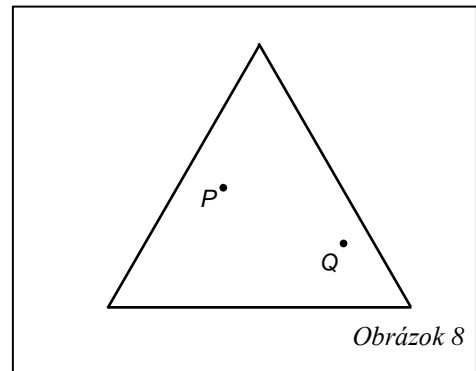
Na vlastné skúmanie použite aplet. Aplet vám dokáže vypočítať, po koľkých odrazoch svetelný lúč opustí priestor uhla (priestor vytvorený zrkadlami).

Hlavné zadanie B:

Cesty svetla v priestoroch s pôdorysom v tvare trojuholníka

V zadaní 3 a 4 ste skúmali štruktúru nekonečného zrkadlového virtuálneho priestoru, ktorý mal pôdorys štvorca.

Na Obrázku 8 vidíte priestor, ktorý má pôdorys rovnostranného trojuholníka. Budete skúmať, ako sa svetelný lúč odráža od zrkadlových vnútorných stien. Svetelný lúč sa môže odraziť od stien 1, 2, 3, 4 alebo viackrát. Na obrázku je pôdorys základnej bunky zrkadlového priestoru vytvoreného tromi zrkadlami. Pracujte v rovine, v ktorej sú dané dva body: bod P , je bod, z ktorého svetelný lúč vychádza, t.j. začiatkový bod a bod Q je bod, ktorým má svetlo prechádzať, resp. kde svetelný lúč končí. Body P a Q môžu byť ľubovoľné vnútorné body zrkadlového trojuholníka.



Body, ktoré by ste si mali všimnúť vo svojom skúmaní

- Je možné nasmerovať lúč svetla tak, aby sa po 1, 2, 3 a viac odrazoch vrátil do toho istého bodu, z ktorého vyšiel. Vytvorí teda lúč svetla nekonečnú odrazovú cestu (nekonečne sa opakujúci obrazec)? Záleží vytvorenie nekonečnej odrazovej cesty od polohy bodov P a Q v základnej bunke?

- Ak existuje cesta svetelného lúča z bodu P cez bod Q a po 1, 2, 3, ... odrazoch späť do bodu P a vy stojíte v bode P , potom sa uvidíte v odrazoch od zrkadlových stien. Aký bude váš obraz (spred, zozadu, z boku)?

Ďalšie skúmanie môže byť o hľadani odpovede na otázku

- Ktoré vlastnosti, ktoré platia pre zrkadlový priestor s pôdorysom rovnostranného trojuholníka, platia aj pre priestor s pôdorysom všeobecného trojuholníka?

Využite **Pracovný list 5**.

Hlavné zadanie C:

Cesty svetla v priestoroch s pôdorysom v tvare obdĺžnika

V tomto zadaní budete skúmať zrkadlové priestory s pôdorysom v tvare obdĺžnika ale tiež biliardové stoly v tvare obdĺžnika. Rozmery obdĺžnika nie sú dôležité. Pri skúmaní vám môže byť veľmi dobrým pomocníkom aplet, ktorý vám pomôže odraz odmerať.

Tip: zapnite v aplete MRIEŽKA. Pomocou tejto funkcie dokážete pomerne jednoducho nastaviť rozmery a veľkosti.



Príklad:

Obdĺžnik má šírku 24dm a dĺžku 15dm. Biliardová guľa (lúč svetla) je odrazená z ľavého dolného rohu pod uhlom 45° .

Svoj pohyb guľa (lúč svetla) ukončí v jednom zo zvyšných troch rohov biliardového stola.

- V ktorom rohu skončí biliardová guľa? Po koľkých odrazoch?
- Na biliardovom stole s rozmermi 24dm a 14dm alebo s rozmermi 24dm a 16dm bude situácia iná. Uvažujte tú istú východiskovú situáciu: guľa (lúč svetla) vychádza z ľavého dolného rohu pod uhlom 45° .
- Skúmajte možnosti pre iné rozmery biliardového stola. Dokážete nájsť všeobecnú zákonitosť? Bude veľmi hodnotné, ak dokážete vypočítať, v ktorom rohu guľa skončí pre dané dĺžky strán obdĺžnika.

Vo vašom skúmaní by ste mali vhodne využiť rozkladaciu metódu. Užitočné môže byť tiež použitie súradníc. Počiatok $O(0, 0)$ je začiatočným bodom gule (lúča). Ďalšie body, ktoré zodpovedajú rohom biliardového stola, keď sa dráha gule rozkladá, majú súradnice rovné násobku dĺžky strany biliardového stola.

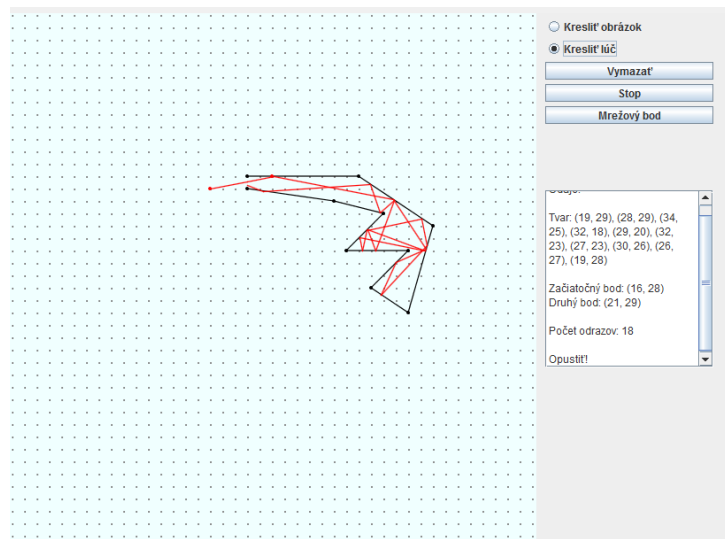
Možno bude užitočné spomenúť si na pojmy: najväčší spoločný deliteľ, najmenší spoločný násobok.

Návrhy na ďalšie skúmanie:

- Čo sa stane, ak začiatočný bod neleží v rohu alebo neleží na ceste, ktorá vychádza z rohu?
- Čo sa stane, ak začiatočný bod bude v rohu, ale guľa sa z neho dá do pohybu nie pod uhlom 45° , ale smerom k inému uzlovému bodu mriežky, t.j. k bodu s celočíselnými súradnicami.

Hlavné zadanie D: Pokus o prelomenie rekordu v počte odrazov

Na obrázku vidíte ukážku z apletu. Je na nej zrkadlový mnohoúhelník, do ktorého vchádza svetelný lúč a po mnohých odrazoch vychádza von.



Doteraz sme neuvažovali prípad, že by lúč svetla, ktorý vošiel do mnohoúhelníka vyšiel po odrazoch von. Lúč svetla na obrázku sa správa tak, že vždy, aj po veľmi veľkom počte odrazov, vyjde von.

Vaše pokusy o rekord

- Navrhните zrkadlový mnohoúhelník (s vchodom), v ktorom sa svetelný lúč bude odrážať čo *najväčší možný počet* krát pred tým, ako vyjde von, pričom mnohoúhelník by mal mať čo najmenší počet strán. V aplete pracujte s režimom MREŽKA, pretože v tejto súťaži môžu byť súradnice vrcholov mnohoúhelníka iba celé čísla. Takisto platí, že súradnice začiatočného a druhého bodu svetelného lúča sú celé čísla.
- Počas skúmania si zapisujte súradnice vrcholov mnohoúhelníka, aby ste ich mohli použiť pri ďalšom skúmaní. Funkcie apletu vám v tom pomôžu.
- Ak si myslíte, že ste dosiahli rekordný počet odrazov, napíšte súradnice vrcholov mnohoúhelníka a svetelného lúča a vysvetlite, prečo ste si vybrali práve takýto tvar zrkadlového mnohoúhelníka.

Nezabudnite! Máte sa pokúsiť nájsť čo najväčší počet odrazov pri najmenšom počte stien zrkadlového mnohoúhelníka. Musíte podrobne a zrozumiteľne vysvetliť svoju voľbu tvaru mnohoúhelníka a dosiahnutý počet odrazov.

Do dokumentu vášho riešenia vložte obrázok – screenshot, na ktorom bude váš pokus o rekord.