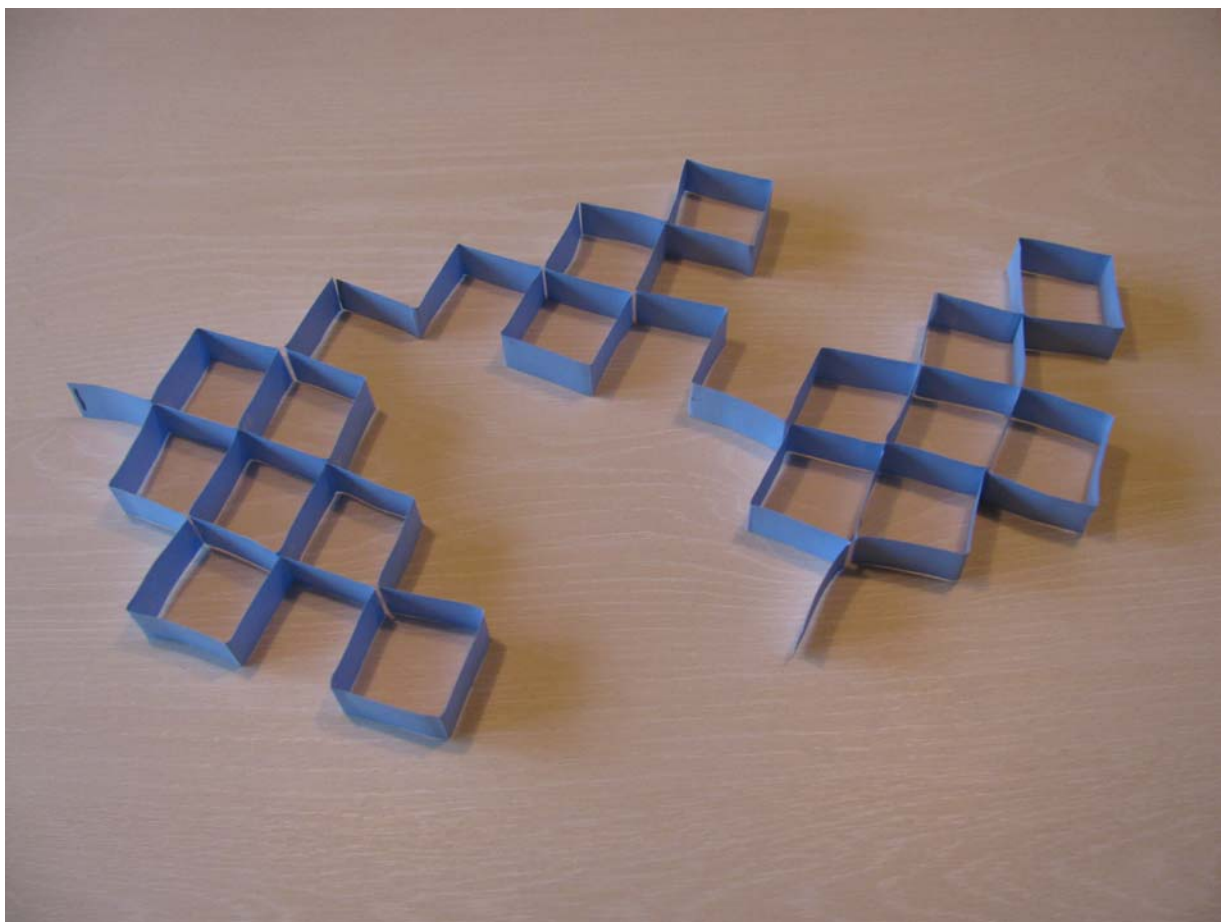




KATEDRA MATEMATIKY
FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED
UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE
Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

MATEMATICKÝ B-DAY 2012

PIATOK 23. november, 9:00-16:00 hod.



(Cr)easy!

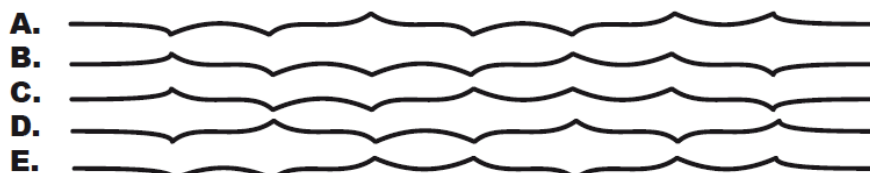


Projekt PRIMAS je financovaný Európskou úniou v rámci Siedmeho rámcového plánu (FP7/2007-2013) číslo zmluvy 244380.

Na úvod matematického dňa B-DAY vám ponúkame dve matematické predjedlá.

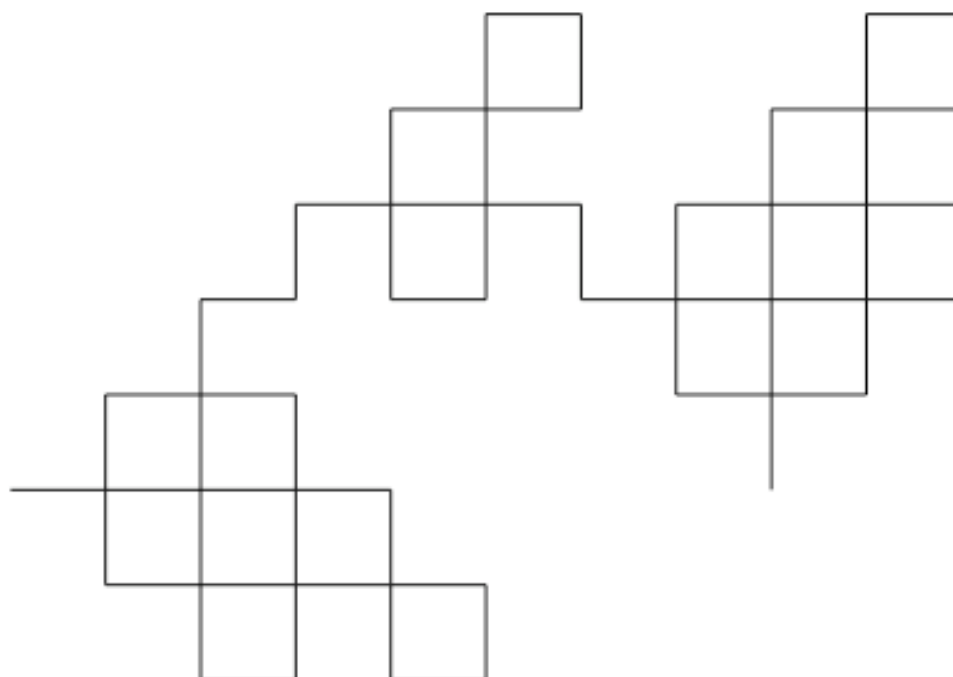
Úloha 6 zo súťaže MATEMATICKÝ KLOKAN 2010:

- 6.** A paper strip is folded in two three times. Then it is unfolded again. When holding the strip upright, you can see the folds from above. Which of the following strips cannot be seen?



Preklad: Papierový pásik bol zložený trikrát na polovicu. Potom bol znovu vystretý. Na vystretom pásiku papiera vidno ohyby. Ktorý z nasledujúcich pásikov takýmto spôsobom nevznikne?

Na nasledujúcom obrázku je lomená čiara, ktorá pripomína labyrint. Takýto labyrint môžeme vyskladať z papierového pásika, keď papierový pásik poskladáme viackrát na polovicu. Pozrite si úvodnú fotografiu a porovnajte ju s obrázkom. Potom, ako papierový pásik poskladáme, znovu ho rozvineme tak, aby susedné časti pásika zvierali pravý uhol.



Témou tohtoročného matematického B-dňa budú takéto labyrintové cesty, ktoré môžu byť vytvorené z viackrát poskladaného papierového pásika a následne rozvinutého tak, že susedné časti cesty sú na seba kolmé.

Úvod

Zadanie matematického B-dňa je pomerne jednoznačné: papierový pásik niekoľkokrát zložíme na polovicu podľa predpísaného postupu. Keď pásik znova vyrovnáme tak, aby steny v zlomoch boli na seba kolmé, výsledkom budú zaujímavé vzory.

Návod na skladanie je jednoduchý, ale rýchlo odhalíte, že model, ktorý podľa skladania vznikne, je pomerne zložitý a má zaujímavé vlastnosti. Preto sa dnes budeme zaoberať takýmito vzormi.

Výsledkom riešenia úloh a problémov dnešného zadania je, že dokážete vysvetliť ako modely z pásikov poskladaných na polovicu vznikajú. Dokonca dokážete predpovedať tvar modelov bez toho, aby ste ich vytvorili. To platí nielen pre vzorky, ktoré skutočne vytvoríte, ale aj pre tú, ktorá by vznikla napríklad 10 násobným zložením pásika, čo sa so žiadnym reálnym pásikom urobiť nedá.

Z čoho sa zadanie skladá

Časť A (Objavovanie) obsahuje úlohy v ktorých budete pozorovať a popisovať modely, ktoré môžu vzniknúť skladaním pásikov papiera. Vytvorenie a porovnávanie modelov bude pripomínať prácu s geometrickými útvarmi. Vyriešenie úloh v časti A vám pomôže v skúmaní zložitejších problémov, ktoré sa nachádzajú v časti B zadania.

Časť B (Skúmanie) vás bude inšpirovať k vlastným objavom. Môžete si pomôcť predloženými návrhmi, ale bude veľmi vhodné, ak sa poberiete cestou vlastného objavovania a skúmania. Je toho veľa, čo môžete odhaliť!

Výsledkom vášho skúmania bude správa o tom, čo ste odhalili. Správa by mala byť formulovaná tak, aby jej porozumel každý, koho aspoň trochu zaujíma matematika.

Svoju správu môžete formulovať pomocou matematického slovníka a výrazov použitých v časti A zadania, ale veľmi vítaná je aj vlastná originálna argumentácia.

K uľahčeniu riešenia úloh sme pre vás pripravili aplet, ktorý dokáže modely vykresľovať. Nedajte sa zlákať k veľmi skorému použitiu apletu! Prečítajte si pozorne najskôr časť A a až keď si budete istí, že procesu skladania pásikov papiera a vytváraniu modelov veľmi dobre rozumiete, použite aplet. Preto nepoužite aplet skôr ako v časti B. Aplet vám bude užitočný na overenie nápadov pri práci na vašom projekte.

Ako si naplánovať dnešný deň

- Najskôr skladajte papier a odhaľujte modely a ich vlastnosti. Tejto činnosti odporúčame venovať prvé dve hodiny (i viac). Množstvo času a pozornosť, ktorú budete venovať časti A vám výrazne uľahčí váš výskum v časti B a umožní skúmať problémy dôkladnejšie a do väčšej hĺbky.
- Nechajte si dostatok času na napísanie správy, ktorú odovzdáte. Správa by mala byť odovzdaná najneskôr o 16:00 hod. Nenechávajte si písanie záverečnej správy o svojom výskume na poslednú chvíľu!

Záverečná správa

Zadanie dnešného matematického dňa B-day vás bude inšpirovať k záverečnej správe, v ktorej nemusíte otrocky odpovedať na všetky navrhované otázky v časti B. Záverečnú správu sa snažte napísať tak, aby jej rozumel i taký čitateľ, ktorý nepozná zadanie skúmaného problému.

Ak budete správu písať rukou, píšete a kreslite perom s **čiernou náplňou**, aby sa vaša správa dala kvalitnejšie skopírovať, pretože bude hodnotená viacerými hodnotiteľmi.

Veľa šťastia a dobrú zábavu!

ČASŤ A: OBJAVOVANIE

Úvod

Počas dnešného matematického dňa B-day budete potrebovať papierové pásiky, veľa papierových pásikov. Presný rozmer pásika nie je podstatný. Pripravili sme pre vás pásiky z papiera veľkosti A4, ktorý sme rozstrihli po dĺžke na osem pásikov. S týmito pásikmi budete experimentovať. Jeden koniec pásika označte na jednej strane čiernou značkou. To bude začiatok pásika.



Položte pásik papiera pre seba na stôl tak, aby čierna značka (začiatok pásika) smerovala k vám. Polohu pásika vidíte na obrázku.

Pásik niekoľkokrát poskladajte na polovicu bez toho, aby ste ho medzi skladaním vyrovnávali. Skladanie niekoľkokrát po sebe sa môže zdať komplikované. Uvedomte si však, že sa vždy dokážete orientovať podľa čiernej značky – začiatku pásika.

Pásik je možné skladať iba dvoma spôsobmi:

- Skladanie smerom od seba, čiže doľava. Pravá strana bude potom ležať *pod* ľavou stranou. Takýto sklad nazveme ľavý a označíme písmenom *l*.
- Skladanie smerom k sebe, čiže doprava. Pravá strana bude potom ležať *pred* ľavou stranou. Takýto sklad nazveme pravý a označíme písmenom *r*.



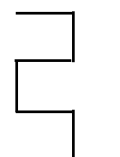
Pásik skladáme týmto spôsobom niekoľkokrát. Zakaždým je to buď sklad *l* alebo sklad *r*.

Postup skladania tvorí postupnosť písmen *l* a *r*. Príklad na ilustráciu: tri poskladania papierového pásika podľa postupu: *l r r*.

Sklad 1: <i>l</i> , doľava	Sklad 2: <i>r</i> , doprava	Sklad 3: <i>r</i> , doprava	Po rozvinutí
			

Pásik na obrázkoch bol poskladaný podľa postupu skladania *l r r*. Pokračujme ďalej:

- Pásik rozvinieme. Dávame pozor, aby steny v ohybe zvierali pravý uhol a jednotlivé steny boli vyrovnané.
- Položíme si pásik na stôl pred seba tak, aby čierna značka bola vľavo.



Keď sa na pásik pozrieme zhora, vidíme lomenú čiaru ako na obrázku vpravo. Takúto lomenú čiaru budeme nazývať **model cesty**. Model cesty budeme kresliť tak, aby **prvý dielik (začiatok cesty)**, ktorý je označený čiernou značkou, smeroval vodorovne zľava doprava.

Model cesty môžeme tiež opísať ako trasu zo začiatočného bodu pásika do posledného bodu, pričom cesta obsahuje všetky časti pásika.

Predstavte si, že prechádzate po modeli cesty zo začiatočného bodu do posledného bodu. Každý úsek cesty je priamy a končí ohybom vpravo (*R*) alebo vľavo (*L*). Uhol každej zákruty





má veľkosť 90° . Na ceste si budeme všímať iba ohyby. Trasu cesty vytvorenú v prvom príklade môžeme popísať nasledujúcou postupnosťou ohybov: *RLLRLL*.

Každému poskladanému pásiku papiera teda vieme priradiť dve dôležité postupnosti:

- **postup skladania**, ktorý predstavuje návod, ako skladať pásik papiera a popisuje ho postupnosť písmen *l* a *r*.
- **model cesty**, ktorý je výsledkom poskladania pásika a môžeme ho nakresliť ako lomenú čiaru alebo popísať postupnosťou písmen *L* a *R*.

Úvod do objavovania

Tabuľka ilustruje štyri postupy skladania, keď papierový pásik bol zložený dvakrát. Každá ilustrácia, každý model cesty začína vodorovne smerom doprava. Ilustrácie ukazujú kde a ako začať.

postup skladania	model cesty
<i>rr</i>	 <i>RRL</i>
<i>rl</i>	 <i>LRR</i>
<i>lr</i>	 <i>RLl</i>
<i>ll</i>	 <i>LLR</i>

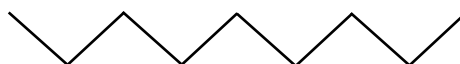
Starostlivo si prakticky overte uvedené štyri postupy skladania a príslušné modely ciest podľa nich.

Použite pripravené papierové pásiky a poskladajte ich trikrát. Zapište a zakreslite si všetky možnosti trikrát poskladaného pásika.

Veľmi dôležité: poskladajte pásiky papiera, zapište si postup skladania a model cesty, ktorý týmto skladaním vznikne. Získate tak konkrétne poznatky o celom probléme.
Nevynechajte túto aktivitu!

◆ Objavovanie 1.

- ak skladáme pásik papiera tak, že ho ohneme trikrát na polovicu, máme osem rôznych možností ako to urobiť. Ktoré možnosti to sú?
- Prehľadne si zapište postupy skladania papierového pásika, keď ho ohneme trikrát. Zapište si postupnosť skladov aj modely ciest, ktoré príslušným skladaním pásika získate.
- ak poskladáme pásik papiera trikrát, určite sa medzi modelmi všetkých ciest nenájde cik-cak vzor, ktorý je znázornený na nasledujúcom obrázku. Dalo sa to odhadnúť už vopred. Prečo?



ak zložíme pásik papiera dvakrát na polovicu a potom ho spätne rozvinieme, vždy dostaneme štyri rovné časti pásika (4) a vždy dostaneme rovnaký počet ohybov (3).

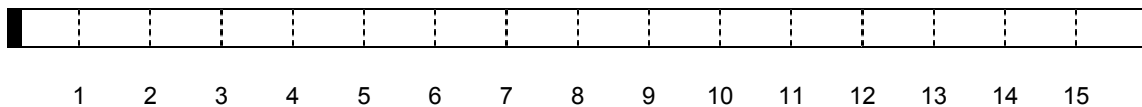
◆ **Objavovanie 2.**

- Koľko rovných častí a koľko zákrut má model cesty, ak pásik papiera zložíme trikrát?
- Koľko rovných častí a koľko zákrut má model cesty, ak pásik papiera zložíme n krát ($n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$)?

Postupnosť ohybov

Ak bol pásik papiera zložený štyrikrát, model cesty, keď pásik rozvinieme, tvorí 16 častí a 15 ohybov.

Na obrázku nižšie je zobrazený rozvinutý pásik papiera, ktorý bol predtým poskladaný. Čiarkovane sú vyznačené ohyby na modeli cesty. Ohyby sme očíslovali smerom zľava doprava.



◆ **Objavovanie 3.**

- Na ktorej pozícii, na obrázku vyššie, leží ohyb prvého preloženia? Inak: ktoré číslo patrí ohybu, ktorý vznikne, ak pásik papiera zložíme raz? A ktoré pozície (čísla) patria druhému, tretiemu a štvrtému preloženiu?

Každej pozícii môžeme priradiť L alebo R , podľa toho, ako znie postup skladania. Nieкто napísal R na pozície 2, 7, 8 a 12 modelu cesty. Takýto zápis postačuje, aby sme dokázali zrekonštruovať celý model cesty!

- Odvoďte celý model cesty (zapište postupnosť písmen R a L).
- Akou postupnosťou zapišeme postup skladania?

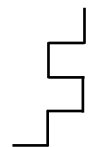
◆ **Objavovanie 4.**

Uvažujme postup skladania, ktorý sa skladá zo šiestich prenutí pásika papiera. Dostaneme vzor cesty, ktorá sa skladá zo 64 častí a 63 ohybov.

- Informácia navyše: prvý ohyb zľava je ohyb R . O ktorých z uvedených 62 ohybov môžete s istotou tvrdiť, že je to ohyb R alebo ohyb L ?
- Ďalšia informácia navyše: zápis cesty začína postupnosťou $RLLR$. O koľkých ohyboch neviete s istotou povedať, či sú R alebo L ?

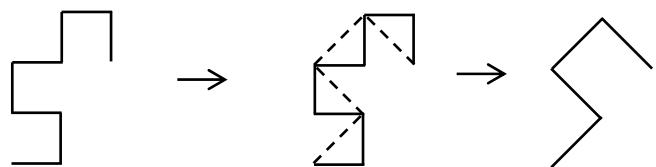
◆ **Objavovanie 5.**

- Prečo lomená čiara na obrázku vpravo nemôže byť modelom cesty?
- Prečo sa v zápise modelu cesty neobjaví postupnosť $RLLRRLLLRLRRRL$?



Vzťah medzi dvoma cestami

Vezmime si nejaký model cesty a vynechajme v ňom každý druhý ohyb. Dostaneme model inej cesty. Pozrite si obrázok vpravo. Druhý model cesty začneme tvoriť z pôvodnej cesty smerom zľava tak, že v pôvodnej ceste vynecháme každý druhý ohyb. Nový model cesty je vyznačený čiarkovanou čiarou na obrázku v strede. Výsledkom procesu vynechania ohybov je model cesty vpravo. Z pôvodnej cesty boli vynechané štyri ohyby.



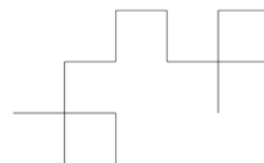
◆ **Objavovanie 6.**

- Model pôvodnej cesty z predchádzajúceho obrázka (lomená čiara vľavo) je výsledkom postupu skladania, ktorý znie: rll . Vysvetlite, prečo je lomená čiara vpravo (výsledok po vynechaní ohybov) tiež modelom cesty. Aký je zápis postupu tohto skladania?

b. Existuje nejaký iný postup skladania so začiatkom vľavo, ktorého výsledkom je ten istý model cesty (t.j. lomená čiara vpravo na predchádzajúcom obrázku)?

◆ **Objavovanie 7.**

Model cesty na obrázku vpravo je výsledkom postupu skladania $rllr$.



a. Ako sa model cesty zmení, ak v postupe skladania zameníme prvé r za l ?

Aké zmeny nastanú v zápise modelu cesty pomocou písmen?

b. Ako sa model cesty zmení, ak v postupe skladania zameníme posledné r za l ?

Aké zmeny nastanú v zápise modelu cesty pomocou písmen?

◆ **Objavovanie 8.**

Model cesty zapísaný postupnosťou písmen $LRLLLRLRRLLR$ je výsledkom skladania so štyrmi ohybmi.

a. Existuje taký postup skladania, ktorý zmení R zapísané na druhej pozícii na L , a z ostatných písmen zostane nezmenených toľko, koľko sa len dá, t.j. zmení sa iba minimálny, nevyhnutný počet písmen zápisu modelu cesty.

Ktoré písmená v zápise daného modelu cesty sa musia v tomto prípade zmeniť a ako sa zmení pôvodný postup skladania?

b. Existuje zápis iného modelu cesty, v ktorom sa L na štvrtej pozícii zmení na R , a z ostatných písmen zostane nezmenených toľko, koľko sa len dá.

Čo môžeme teraz povedať o postupnosti písmen zápisu modelu cesty a o postupe skladania?

Schematický prehľad odvodenia zápisu modelu cesty z postupu skladania

Vezmime postup skladania v tvare $rllrl$. Zapisujeme postupne jednotlivé ohyby a napíšme kompletný zápis modelu cesty.

Pozrite si nasledujúcu tabuľku smerom zdola nahor. Model cesty (zapísaný pomocou písmen L a R) zapisujeme postupne od prvého po štvrtý ohyb. Zakaždým keď pásik papiera ohneme na polovicu, zapíšeme písmeno na príslušnú pozíciu ohybu. Výsledný zápis modelu cesty tvorí postupnosť pätnástich písmen na pozíciách 1 až 15. Môžeme tiež povedať, že každá číselná pozícia má svoj kód vyjadrený písmenom L alebo R .

ohyb 4	L	R	R	L	L	L	R	R	L	R	R	R	L	L	R
ohyb 3		R		L		L		R		R		R		L	
ohyb 2				L				R				R			
ohyb 1								R							
pozícia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

◆ **Objavovanie 9.**

Poznáme kódy troch pozícií v zápise modelu cesty, ktorý je vytvorený na základe postupu skladania so štyrmi ohybmi.

ohyb 4				L	R		R				?		?	?	
ohyb 3															
ohyb 2															
ohyb 1															
pozícia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Aké kódy majú tri pozície, ktoré sú označené otáznikom?

ČASŤ B: VAŠE VLASTNÉ SKÚMANIE

V časti A ste si precvičili skladanie papierových pásov a experimentovali ste so zápsmi skladania a modelmi ciest, ktoré vzniknú rôznym skladaním. Získané skúsenosti využijete v ďalšom skúmaní, v ktorom sa hlbšie ponoríte do tejto zaujímavej problematiky.

Dohoda

Na overenie vašich úvah a dokazovanie vašich tvrdení použite aplet. Na dôkaz pravdivosti tvrdenia nepostačí, ak uvediete iba niekoľko príkladov. Pokúste sa vždy nájsť presné argumenty, ktorými každé svoje tvrdenie dokážete.

Tri výroky

V nasledujúcom texte sú sformulované tri pravdivé výroky. Každý výrok je doplnený otázkou. Presvedčivá odpoveď na každú položenú otázku vám pomôže vo vašom ďalšom skúmaní. Veľmi vítané je i každé vaše vlastné tvrdenie, ktoré ste svojim skúmaním odhalili.

➤ Výrok 1:

V každom modeli cesty platí, že prvá a posledná časť cesty sú na seba kolmé.

Otázka:

Pokúste sa nájsť dostatočne vyčerpávajúce zdôvodnenie pravdivosti prvého výroku.

➤ Výrok 2:

Pre každý ohyb v modeli cesty, ktorý vznikne podľa daného postupu skladania sa dá presne predpovedať, či bude L (ľavý) alebo R (pravý).

Otázka:

Je daný nasledujúci postup skladania $rrrlrrrlr$. Na základe čoho viete predpovedať aký ohyb (R alebo L) bude na pozícii 16?

➤ Výrok 3:

Pre každý model cesty je možné vždy nájsť príslušný postup skladania.

Otázka:

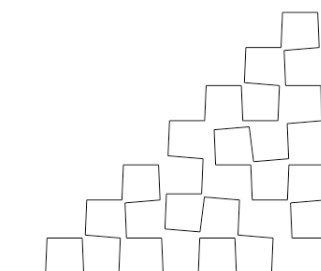
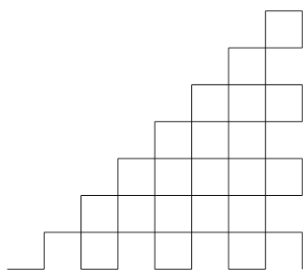
Vedeli by ste nájsť všeobecný postup, pomocou ktorého je možné nájsť príslušný postup skladania pre akýkoľvek model cesty.

V nasledujúcom texte nájdete námety na skúmanie. Vyberte si z nich alebo skúmajte vlastné výskumné otázky.

Zrozumiteľne a jasne popíšte predmet svojho skúmania a svoje závery a riešenia.

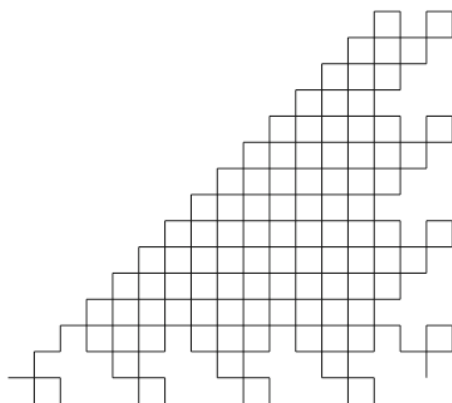
- Vyberme jedno z čísel n ($= 1, 2, 3, 4, 5, \dots$).
Pre každý model cesty, ktorý vznikne n ohybmi, platí, že vzdialenosť od začiatku po koniec cesty je rovnaká.
Skúmajte prečo je to tak.
Poznámka: vzdialenosť od začiatku po koniec cesty, samozrejme, závisí od dĺžky papierového pásika, ktorým začíname. Je rozumné začať s pásikom dĺžky 2^n , pretože potom platí, že každá priama časť cesty (každý dielik cesty) má dĺžku 1.
- Vyberme jedno z čísel n ($= 1, 2, 3, 4, 5, \dots$).
Na zakreslenie modelu cesty použime štvorčekový papier. Označme začiatkový bod modelu cesty ako fixný bod na štvorčekovom papieri.
 - Kde ležia body, v ktorých končí model cesty pre dané n , kde n je počet ohybov?
 - Medzi bodom, ktorý označuje začiatok cesty a bodom, ktorý označuje koniec cesty, je veľa bodov - ohybov, ktoré sú od začiatku cesty vzdialené viac ako je od začiatku cesty vzdialený koniec cesty. Skúmajte, aké vzdialenosti sú možné. Dokážete vyjadriť maximálnu vzdialenosť od začiatku cesty do ľubovoľného bodu cesty v modeli cesty ako násobok n ?

- Existuje veľa modelov ciest v ktorých sa body ohybu dotýkajú (splynú). Uvedená situácia nastane vtedy, ak sa v zápise modelu cesty objaví postupnosť RRR alebo LLL : po troch ohyboch R alebo L sa vrátíme späť do začiatočného bodu. Ak $n = 5$, každý model cesty bude obsahovať aspoň jednu podpostupnosť LLL (môžete to overiť)
 - Ukážte, že pre každé $n > 5$ každý zápis modelu cesty obsahuje aspoň jednu podpostupnosť LLL .
 - Zdôvodnite, prečo v každom možnom zápise modelu cesty pre rastúce n počet podpostupností LLL rastie (alebo aspoň neklesá).
- Preštudujte si nasledujúce obrázky: na obrázku vľavo majú všetky ohyby cesty uhol veľkosti 90° , zatiaľ čo na obrázku vpravo uhol každého ohybu má veľkosť menšiu ako 90° . Obrázok vpravo jasne ilustruje, že v modeli cesty nikdy nevznikne prekrytie. To znamená, že po žiadnej priamej časti cesty sa neprejde dvakrát, vždy sa iba v ohyboch



dotknú. Inak to znamená, že postupnosť $RRRR$ alebo $LLLL$ sa v zápise modelu cesty nikdy neobjaví.

- Pokúste sa dokázať, že $RRRR$ (alebo $LLLL$) sa nikdy v zápise modelu cesty nevyskytne.
 - Kedy sa v modeli cesty dostaneme do "bodu kontaktu", čiže do bodu, v ktorom sme sa počas cesty už raz ocitli? Pomôžte si obrázkom.
- V modeli cesty sa dajú nájsť symetrické časti. Je to vidieť napríklad na nasledujúcom obrázku. Symetrický je celý model cesty, ale symetrické sú i jednotlivé časti cesty. Môžete zdôvodniť, kde a prečo v modeli cesty dochádza k jednotlivým symetriám?



- Uvažujme súvislý blok pozostávajúci z 2^k písmen L a R ; ktorý sme vybrali zo zápisu modelu nejakej cesty. Blok písmen má dĺžku 4, 8, 16, 32, ... ($k \geq 2$). Spočítajme počet výskytov písmena L a počet výskytov písmena R v danom bloku písmen. Rozdiel medzi týmito dvoma počtami je buď 0 alebo 2.
 - Dokážete vysvetliť prečo?
 Rozdiel medzi počtom výskytov R a počtom výskytov L v bloku nazveme *odchýlka* bloku. Predchádzajúce tvrdenie hovorí, že bloky dĺžky 2^k majú odchýlku 0 alebo 2.
 - Skúmajte maximálnu odchýlku modelov cesty, ktoré sú vytvorené n ohybmi a sformulujte tvrdenie.

KONIEC